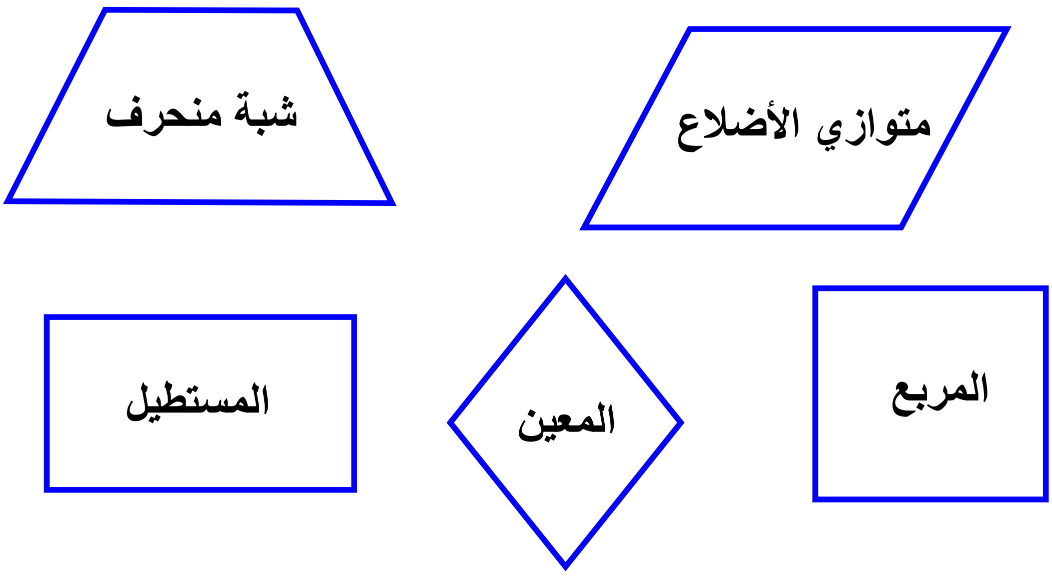
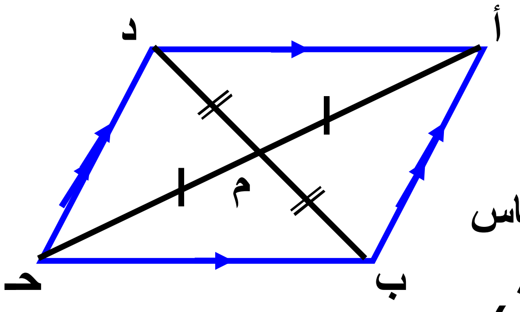
ا لشـــكـل الـربــاعــي

<u>الشكل الرباعي</u> : هو اتحاد أربعة قطع مستقيمة تسمي أضلاعه .



(١) <u>متوازى الأضلاع</u> : هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين .



خواصه :

(١) كل ضلعين متقابلين متساويين في الطول

أ ب = د حـ ، أ د = ب حـ

(٢) كل زاويتين متقابلتين متساويتين في القياس

ق (أ̂) = ق (حـ̂) ، ق (ب̂) = ق (د̂)

(٣) مجموع آي زاويتين متتاليتين يساوي ١٨٠ °

مثلا : ق (أ̂) + ق (ب̂) = ١٨٠ ، ق (ب̂) + ق (حـ̂) = ١٨٠

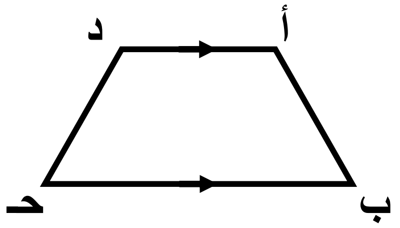
(٤) القطران ينصف كل منهما الآخر

م أ = م حـ ، م ب = م د

(٢) **الشبة المنحرف** : هو شكل رباعي فيه ضلعان متقابلان متوازيان و الضلعين الآخرين غير متوازيين .

إذا كان أ ب حـ د شبة منحرف

فإن : $\overline{أ د} // \overline{ب حـ}$



حقيقة :

آي شكل رباعي فيه ضلعين متقابلين متوازيان متساويان في الطول يكون الشكل متوازي أضلاع .

مثال : أكمل ما يأتي :

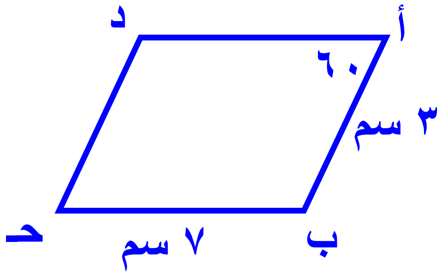
أ ب حـ د متوازي أضلاع

ب حـ = ٠٠٠ سم

حـ د = ٠٠٠ سم

ق ($\hat{حـ}$) = ٠٠٠٠ °

ق ($\hat{ب}$) = ٠٠٠٠ °



مثال : الشكل المقابل : أ ب حـ د متوازي أضلاع

أ حـ = ١٢ سم ، ب د = ٩ سم

ق(د $\hat{أ}$ حـ) = ٣٠ ° ،

ق(أ $\hat{حـ}$ د) = ٥٠ °

فإن :

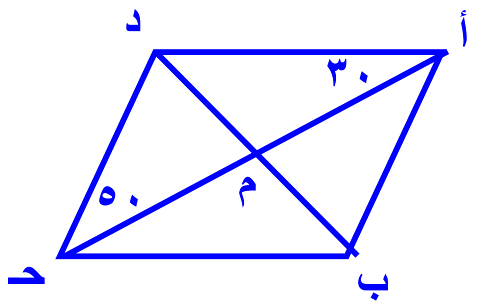
(١) م ب = ٠٠٠ = ٠٠٠ سم

(٢) م أ = ٠٠٠ = ٦ سم

(٢) ق (أ $\hat{حـ}$ ب) = ٠٠٠٠ °

(٣) ق (ب $\hat{أ}$ حـ) = ٠٠٠٠ °

(٤) ق (أ $\hat{ب}$ حـ) = ق (أ $\hat{د}$ حـ) = ٠٠٠٠٠ °

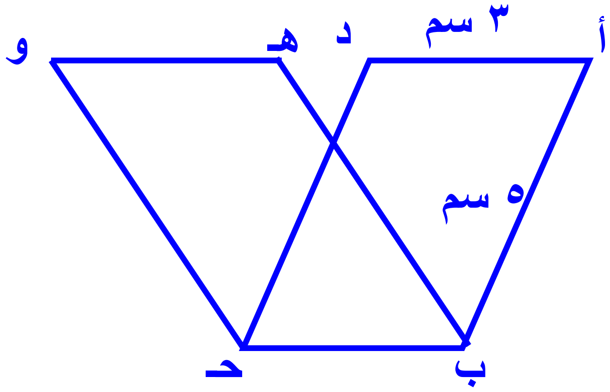


مثال : في الشكل الموضح :

أ ب حـ د ، هـ ب حـ و متوازيا أضلاع

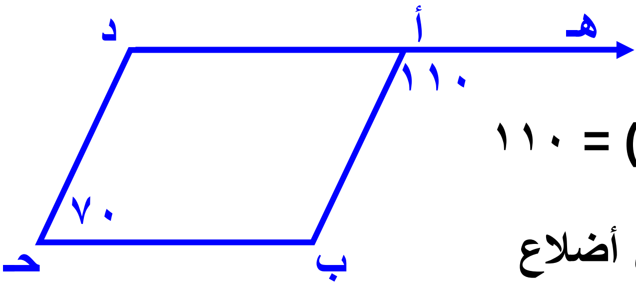
أ ب = هـ ب = ٥ سم

أ د = ٣ سم أوجد طول هـ و ، حـ و



مسائل علي متوازي الأضلاع

[١] في الشكل المقابل :



أ د // ب حـ ، ق(هـ أ ب) = ١١٠

ق(حـ) = ٧٠

أثبت أن : أ ب حـ د متوازي أضلاع

البرهان :

∵ أ د // ب حـ ، أ ب قاطع لهما

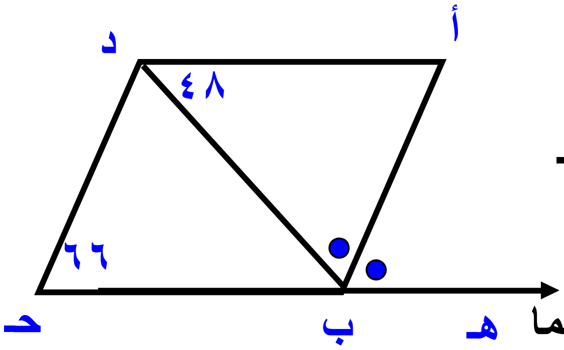
∴ ق(هـ أ ب) = ق (ب) = ١١٠ بالتبادل

∵ ق (ب) + ق (حـ) = ١٨٠ وهما داخلتان وفي جهة واحدة

∴ أ ب // د حـ ، أ د // ب حـ

∴ أ ب حـ د متوازي أضلاع

مثال : في الشكل الموضح :



أ د // ب حـ ، ب أ ينصف د ب هـ

أثبت أن : أ ب حـ د متوازي أضلاع

البرهان :

∵ أ د // ب حـ ، د ب قاطع لهما

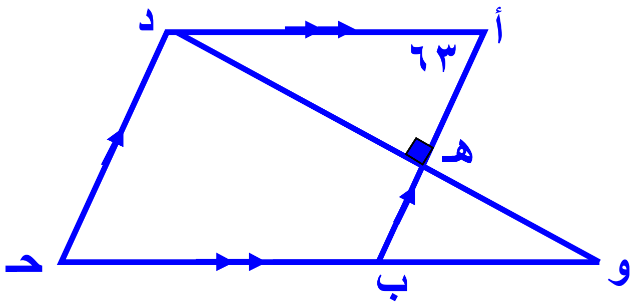
∴ ق (أ د ب) = ق (د ب حـ) = ٤٨ بالتبادل

∴ ب ∈ حـ هـ ∴ ق (د ب هـ) = ١٨٠ ـ ٤٨ = ١٣٢

∵ ب أ ينصف د ب هـ

∴ ق (أ ب هـ) = ق (حـ) = ١٣٢ ÷ ٢ = ٦٦ وهما متناظرتان

∴ أ ب // د حـ ، أ د // ب حـ ∴ أ ب حـ د متوازي أضلاع



مثال : في الشكل المقابل :

أ ب حـ د متوازي أضلاع

$\overline{\text{د هـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

، $\overleftarrow{\text{د هـ}} \cap \overleftarrow{\text{أ ب}}$ = { هـ }

، $\overleftarrow{\text{د هـ}} \cap \overline{\text{حـ ب}}$ = { و }

، ق ($\hat{\text{أ}}$) = ٦٣

أوجد قياس الزوايا د $\hat{\text{حـ}}$ ب ، أ $\hat{\text{د}}$ و ، ب $\hat{\text{و}}$ د

البرهان :

∵ أ ب حـ د متوازي أضلاع ، ق($\hat{\text{أ}}$) = ٦٣

∴ ق (ب $\hat{\text{حـ}}$ د) = ق ($\hat{\text{أ}}$) = ٦٣ (من خواصه) أولا

<u>في المثلث أ د هـ</u> :

∵ ق($\hat{\text{أ}}$) = ٦٣ ، ق (أ $\hat{\text{هـ}}$ د) = ٩٠

∴ ق(أ $\hat{\text{د}}$ هـ) = ق (أ $\hat{\text{د}}$ و) = ١٨٠ ـ (٦٣ ـ ٩٠) = ٢٧ ثانيا

∵ $\overline{\text{أ د}}$ // $\overline{\text{حـ ب}}$ ، $\overline{\text{د و}}$ قاطع لهما

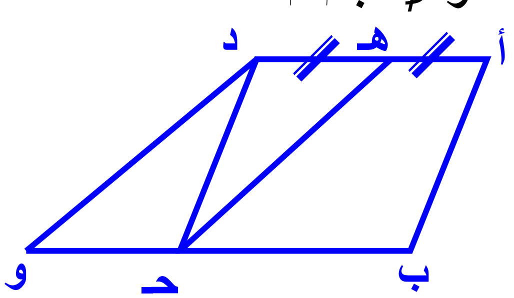
∴ ق(حـ $\hat{\text{و}}$ د) = ق(أ $\hat{\text{د}}$ و) = ٢٧ بالتبادل ثالثا

سؤال للتفكير

[١] أ ب حـ د متوازي أضلاع ، هـ منتصف $\overline{\text{أ د}}$ ، و $\notin$ $\overline{\text{ب حـ}}$

، و $\in$ $\overline{\text{ب حـ}}$ بحيث ب حـ = ٢ حـ و

أثبت أن : الشكل د هـ حـ و متوازي أضلاع



[٢] أ ب حـ د متوازي أضلاع ، س $\in$ $\overline{\text{أ د}}$

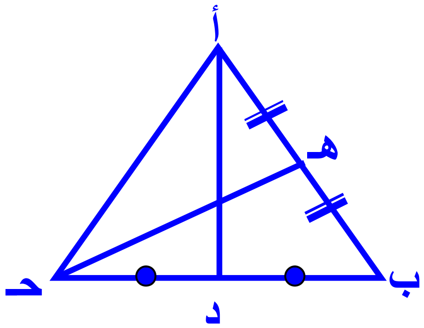
، ص $\in$ $\overline{\text{ب حـ}}$ بحيث $\overline{\text{ب س}}$ تنصف ∠ ب ، $\overline{\text{د ص}}$ تنصف ∠ د

أثبت أن : الشكل ب س د ص متوازي أضلاع

متوسطات المثلث

تعريف :

المتوسط في المثلث : هو قطعة مستقيمة مرسومة من أحد رؤوس المثلث إلي منتصف الضلع المقابل .



أ د ، حـ هـ متوسطان في المثلث

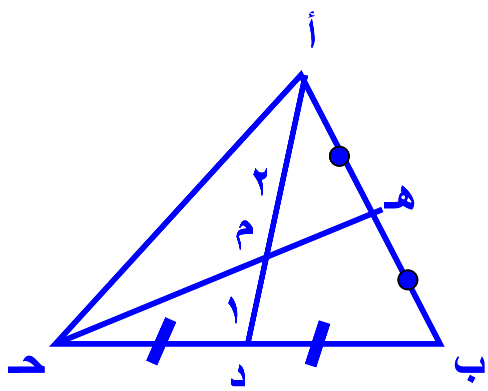
ملحوظة : لأى مثلث ثلاث متوسطات من رؤسه

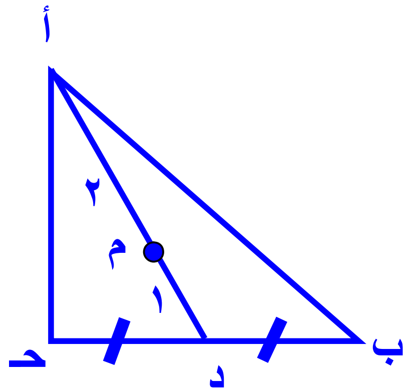
نظرية١ :

متوسطات المثلث تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة .

نظرية ٢ :

نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلا منها بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة . ، بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس



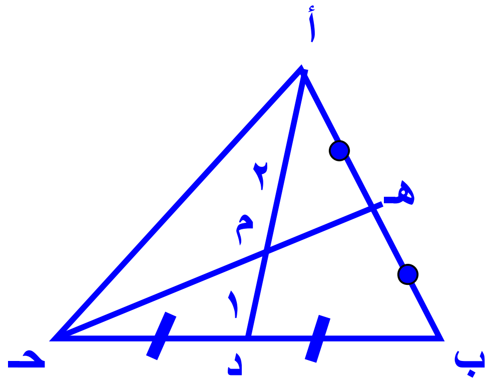


∵ أ د ∩ د حـ = { م } حيث م تسمى نقطة تقاطع المتوسطات

∴ م د = $\frac{١}{٢}$ م أ = $\frac{١}{٣}$ أ د ، م أ = ٢ م د = $\frac{٢}{٣}$ أ د

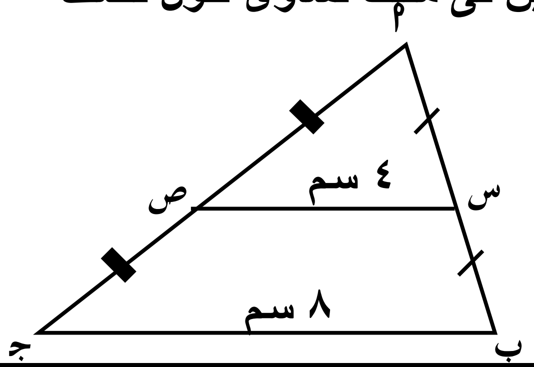
، ب د = د حـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ

مثال : في الشكل المقابل :
إذا كان م هـ = ٤ سم ، أ د = ٩ سم
أوجد طول م حـ ، م د ، م أ



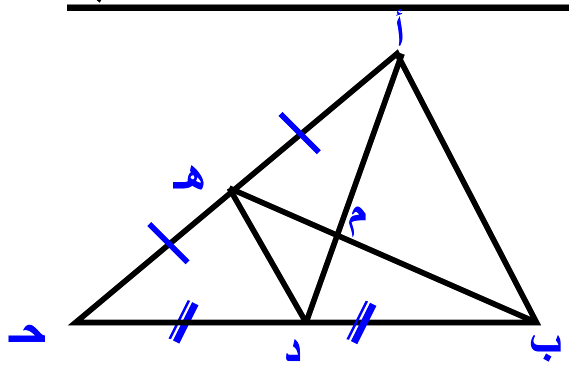
الحل : ∵ أ هـ ∩ حـ د = { م }
، م نقطة تقاطع المتوسطات
∴ م هـ = $\frac{1}{2}$ م حـ ∴ م حـ = ٢ × ٤ سم = ٨ سم
∴ م د = $\frac{1}{3}$ ا د = $\frac{1}{3}$ × ٩ = ٣ سم
∴ م ا = ٢ م د = ٢ × ٣ = ٦ سم

<u>موضوع مرتبط بالدرس</u> :
(القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفي ضلعين فى مثلث تساوى طول نصف الضلع الثالث ، و توازيه)
فى الشكل المقابل :



∵ س ، ص منتصفى ا ب ، ا جـ
∴ س ص = $\frac{1}{2}$ ا جـ

مثال : في الشكل المقابل :
د ، هـ منتصفا ب حـ ، أ حـ علي الترتيب
، أ د ∩ ب هـ = { م }
أوجد محيط △ د م هـ علماً بأن :
أ د = ٩ سم ، ب هـ = ١٢ سم
، أ ب = ١٦ سم



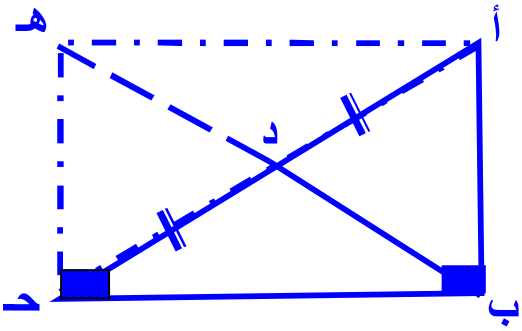
الحل : ∵ م نقطة تلاقي متوسطات △ أ ب حـ ∴ م د = $\frac{1}{3}$ أ د = $\frac{1}{3}$ × ٩ = ٣ سم
∴ ، م هـ = $\frac{1}{3}$ ب هـ = $\frac{1}{3}$ × ١٢ = ٤ سم
∵ د هـ مرسومة بين منتصفي ب حـ ، أ حـ
∴ د هـ = $\frac{1}{2}$ أ ب = $\frac{1}{2}$ × ١٦ = ٨ سم
∴ محيط المثلث م د هـ = م د + د هـ + م هـ = ٣ + ٨ + ٤ = ١٥ سم

نظرية ٣ : طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوي نصف طول وتر هذا المثلث .

المعطيات : أ ب حـ مثلث فيه

ق(ب̂) = ٩٠

، ب د متوسط



المطلوب : إثبات أن : ب د = ١/٢ أ حـ

العمل : نرسم ب د ، هـ ∋ ب د

بحيث ب د = د هـ ثم نرسم أ هـ ، حـ هـ

البرهان :

∵ د منتصف أ حـ ، د منتصف ب هـ

، الشكل أ ب حـ هـ قطراه أ حـ ، ب هـ ينصف كل منهما الآخر

∴ الشكل أ ب حـ هـ متوازي أضلاع

∵ ق (ب̂) = ٩٠ ∴ الشكل أ ب حـ هـ مستطيل

∵ أ حـ = ب هـ ، أ د = د حـ = ب د = د هـ

∴ ب د = ١/٢ ب هـ ∴ ب د = ١/٢ أ حـ

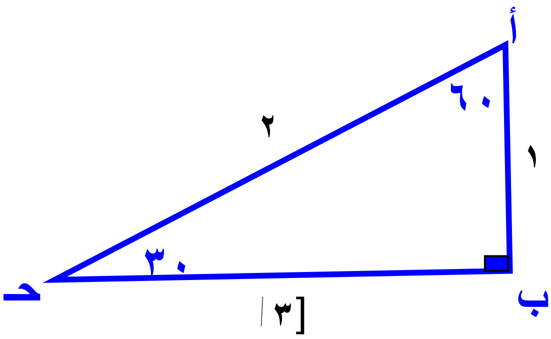
تعريف الوتر : هو الضلع المقابل للزاوية القائمة أو أكبر أضلاع المثلث القائم

نتيجة هامة : طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها ٣٠ في المثلث القائم الزاوية يساوي نصف طول الوتر .

إذا كان أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب

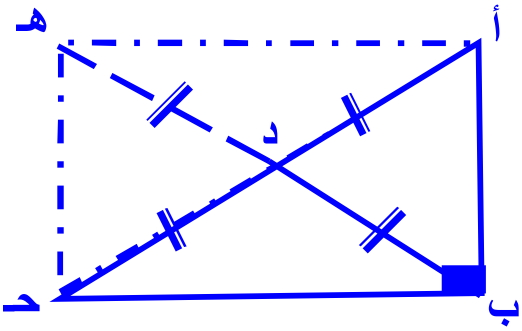
، ق(أ حـ̂ ب) = ٣٠

فإن : أ ب = ١/٢ أ حـ ، أ حـ = ٢ أ ب



نظرية ٤ :

إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوي نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس فإن زاوية هذا الرأس تكون قائمة .



المعطيات : أ ب حـ مثلث ، ب د متوسط فيه ،
أ د = د حـ = د ب

المطلوب : إثبات أن : ق (أ ب̂ حـ) = ٩٠

العمل : نرسم ب د ونأخذ هـ ∋ ب د بحيث ب د = د هـ ثم نرسم أ هـ ، حـ هـ

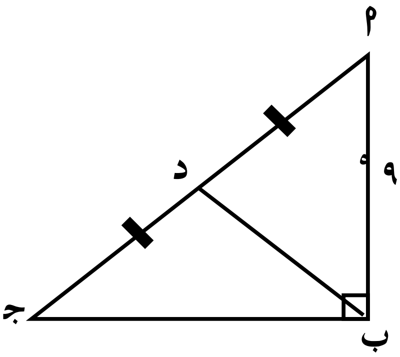
البرهان :

∵ ب د = $\frac{١}{٢}$ أ حـ ، ب د = $\frac{١}{٢}$ ب هـ ∴ حـ د = ب هـ

∵ د منتصف كل من أ حـ ، ب هـ ∴ الشكل أ ب حـ هـ مستطيل

∴ ق(أ ب̂ حـ) = ٩٠

مختصر النظرية :



مثال : فى الشكل المقابل :

∵ ٩ ب متوسط فى △ ٩ ب جـ ، ق{ ∠ ب}= ٩٠°

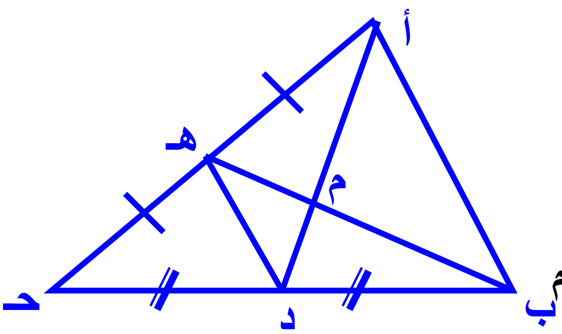
∴ ب د = $\frac{١}{٢}$ ٩ جـ

مختصر عكس النظرية :

∵ ب د = $\frac{١}{٢}$ ٩ جـ ∴ ق{ ∠ ب} = ٩٠°

∴ △ ٩ ب جـ قائم الزاوية فى ب

مثال : في الشكل المقابل :



د ، هـ منتصفا ب حـ ، أ حـ علي الترتيب
أ د ∩ ب هـ = { م }
أوجد محيط المثلث د م هـ علماً بأن :
أ د = ٩ سم ، ب هـ = ١٢ سم، أ ب = ١٦ سم

الحل :

∵ م نقطة تلاقي متوسطات المثلث أ ب حـ

∴ م د = $\frac{١}{٣}$ أ د = $\frac{١}{٣}$ × ٩ = ٣ سم

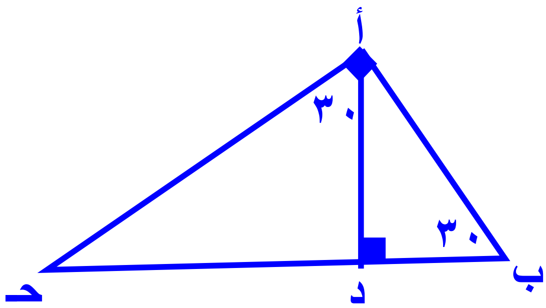
∴ م هـ = $\frac{١}{٣}$ ب هـ = $\frac{١}{٣}$ × ١٢ = ٤ سم

∴ د هـ مرسومة بين منتصفي ب حـ ، أ حـ

∴ د هـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب = $\frac{١}{٢}$ × ١٦ = ٨ سم

∴ محيط المثلث م د هـ = م د + د هـ + م هـ

= ٣ + ٨ + ٤ = ١٥ سم



مثال : في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه ق (∠ أ) = ٩٠ °

ب حـ = ١٢ سم ، أ د ⊥ ب حـ

أوجد : طول أ حـ ، ب د

الحل : في △ أ ب حـ :

∵ ق(∠ ب أ حـ) = ٩٠ ، ق (∠ ب) = ٣٠

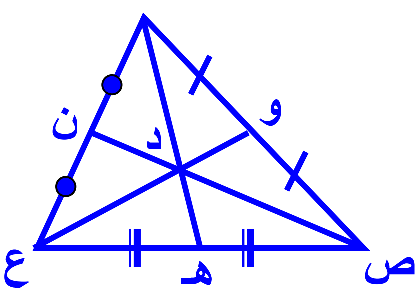
∴ أ حـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ = ٦ سم

في △ أ د حـ :

∵ ق (أ د̂ حـ) = ٩٠ ، ق(حـ̂) = ٦٠ ، ق(د أ̂ حـ)=٣٠

∴ د حـ = $\frac{١}{٢}$ أ حـ = $\frac{١}{٢}$ × ٦ = ٣ سم

∴ ب د = ب حـ ـ د حـ = ١٢ ـ ٣ = ٩ سم



مثال : في الشكل المقابل : و ، هـ ، ن منتصفات

س ص ، ص ع ، س ع علي الترتيب

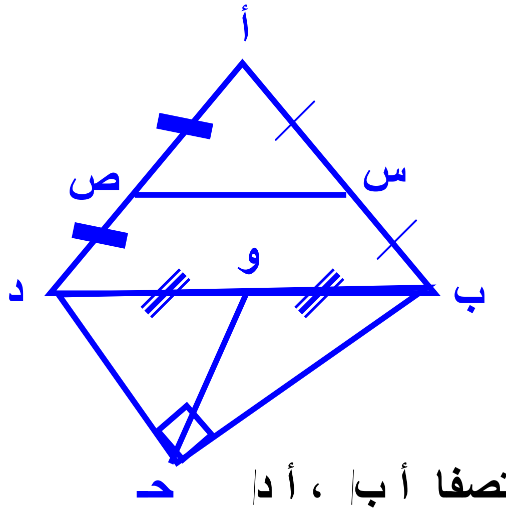
حيث س هـ = ١٢ سم ،

ص ن = ١٥ سم ، و د = ٤ سم

أكمل مايأتي :

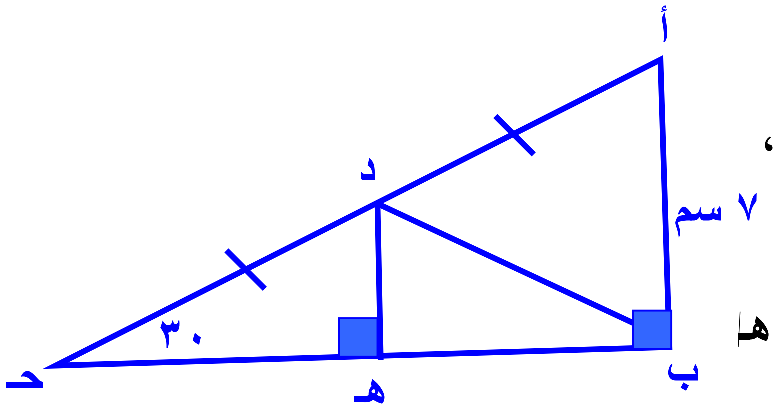
(١) د نقطة ٠٠٠٠٠ متوسطات المثلث س ص ع

(٢) د ن = ٠٠٠ ص ن = ٠٠٠ سم (٣) د ع = ٠٠٠ و د = ٠٠٠ سم



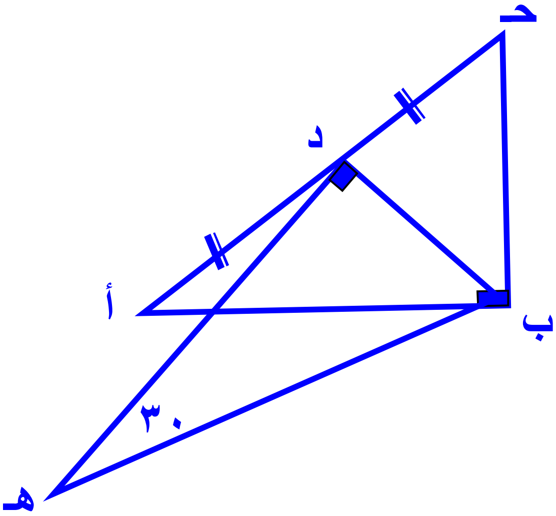
مثال : في الشكل المقابل :
أ ب حـ د شكل رباعي فيه
س ، ص ، و منتصفات الأضلاع
أ ب ، ب حـ ، حـ د ، د أ علي الترتيب
ق(∠ ب أ د) = ٩٠ .
أثبت أن : س ص = حـ و
البرهان :
في △ أ ب د : ∵ س ص مرسومة بين منتصفا أ ب ، أ د
∴ س ص = ١/٢ ب د (١)
في △ ب حـ د :
∵ ق(∠ حـ) = ٩٠ ، حـ و متوسط ∴ حـ و = ١/٢ ب د (٢)
∴ من (١) ، (٢) نجد أن : س ص = حـ و

مثال : في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث فيه
ق(بˆ) = ق(د هـˆ حـ)=٩٠ ،
ق(حـˆ) = ٣٠ ،
، طول أ ب = ٧ سم ،
أحسب طول المتوسط ب د ، د هـ
الحل :
في △ أ ب حـ : ∵ ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠ ، ق (∠ جـ) = ٣٠
∴ أ ب = ١/٢ أ حـ ∴ أ حـ = ٢ × أ ب = ١٤ سم
∵ ب د متوسط ، ق(∠ ب) = ٩٠
∴ ب د = ١/٢ أ حـ = ١/٢ × ١٤ = ٧ سم
في △ د هـ حـ : ∵ ق(∠ د هـ حـ) = ٩٠ ، ق(∠ حـ) = ٣٠
∴ د هـ = ١/٢ د حـ = ١/٢ × ٧ = ٣.٥ سم

مثال : في الشكل الموضح :



ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠ ، د منتصف أحـ
ق(∠ هـ) = ٣٠ ، ق(∠ ب د هـ) = ٩٠
أثبت أن : أ حـ = ب هـ
الحل : في △ أ ب حـ :
∵ ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠ ، ب د متوسط

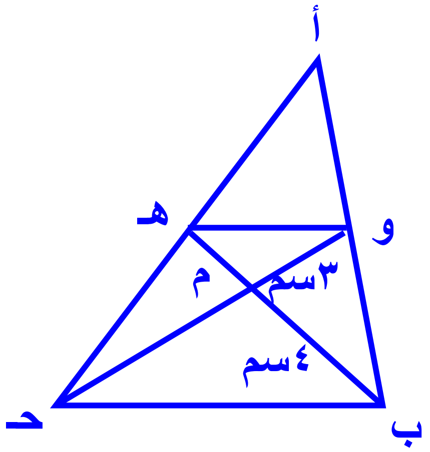
∴ ب د = $\frac{١}{٢}$ أ حـ ——— (١)

في △ ب د هـ :
∵ ق(∠ هـ) = ٣٠ ، ق(∠ ب د هـ) = ٩٠

∴ ب د = $\frac{١}{٢}$ ب هـ ——— (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن : أ حـ = ب هـ

مثال : في الشكل المقابل :



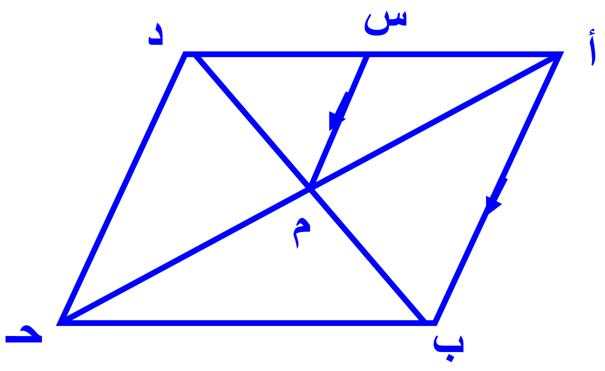
أ ب حـ مثلث ، ب هـ ، حـ و متوسطان حيث
ب هـ ∩ حـ و = { م } ، م و = ٣ سم ،
م ب = ٤ سم ، ب حـ = ٨ سم
أوجد أطوال حـ م ، م هـ ، و هـ
الحل :
∵ م نقطة تقاطع متوسطات المثلث

∴ م هـ = $\frac{١}{٢}$ م ب = $\frac{١}{٢}$ × ٤ = ٢ سم

، م حـ = ٢ م و = ٢ × ٣ = ٦ سم
∵ و هـ مرسومة بين منتصفي أ ب ، أ حـ

∴ و هـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ٨ = ٤ سم

مثال : في الشكل الموضح :



أ ب حـ د متوازي أضلاع حيث

$\overline{\text{أ حـ}} \cap \overline{\text{ب د}}$ = { م } و رسم

م س // $\overline{\text{ب أ}}$ و يقطع $\overline{\text{أ د}}$ في س

أثبت أن : س منتصف $\overline{\text{أ د}}$

الحل :

∵ أ ب حـ د متوازي أضلاع

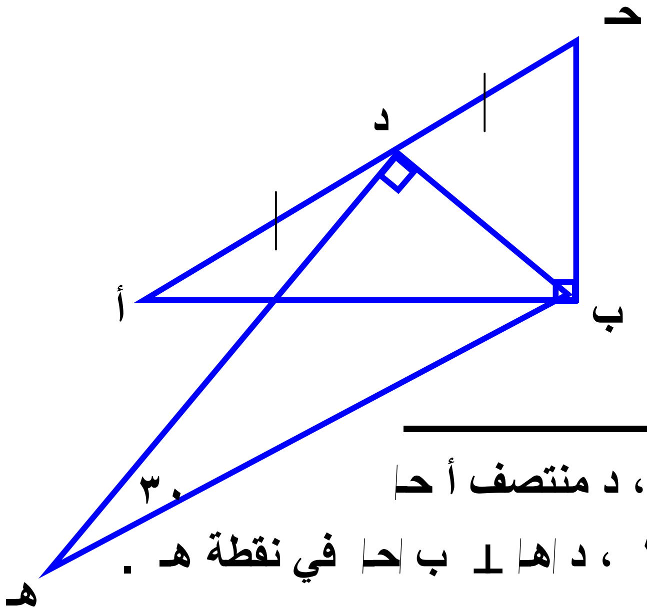
∴ القطران ينصف كل منهما الآخر ∴ م ب = م د

في △ أ د ب :

∵ م س // $\overline{\text{أ ب}}$ ، م ب = م د

∴ أ س = س د ∴ س منتصف $\overline{\text{أ د}}$

سؤال للتفكير



(١) في الشكل الموضح :

ق($\hat{\text{هـ}}$) = ٣٠ ، ق(أ $\hat{\text{ب}}$ حـ) = ٩٠

، ق(ب $\hat{\text{د}}$ هـ) = ٩٠ ، ب هـ = ٨ سم ب

أوجد : طول $\overline{\text{أ حـ}}$.

---

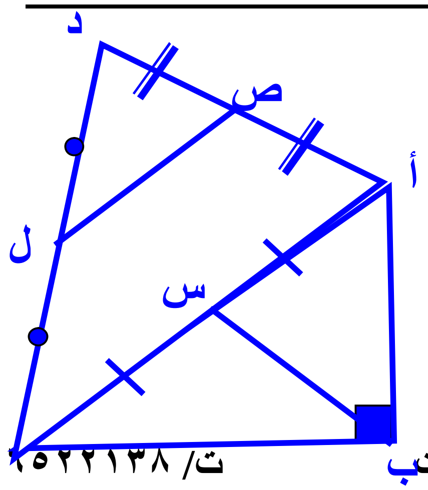
(٢) أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب ، د منتصف أ حـ

فإذا كان ق(د $\hat{\text{ب}}$ حـ) تساوى ٣٠ ، د هـ ⊥ ب حـ في نقطة هـ .

فبرهن علي د هـ = $\frac{١}{٤}$ أ حـ

---

(٣) في الشكل المقابل :

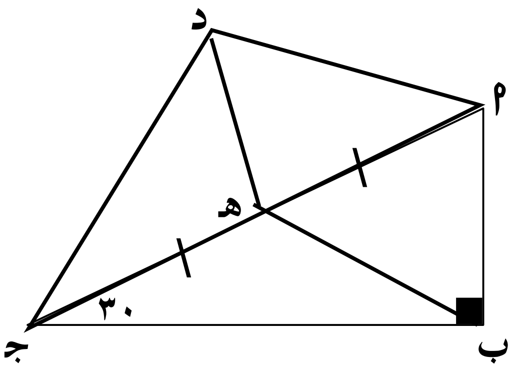


ص ، س ، ل منتصفات $\overline{\text{د أ}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overline{\text{د حـ}}$

علي الترتيب ، ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠

أثبت أن : ص ل = ب س

(٣) فى الشكل المقابل :



ا ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب

، ق(∠ ا ب جـ) = ٣٠°

، ا ب = ٥ سم ، هـ منتصف ا جـ

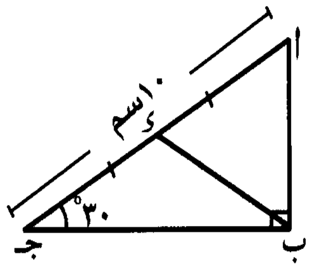
إذا كان د هـ = ٥ سم

فأثبت أن : ق(∠ ا ب جـ) = ٩٠

---

(٤) أكمل

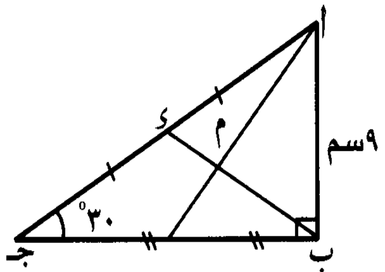
❶



ب ى = ... سم ، أ ب = ...سم

محيط △ أ ب ى = ...سم

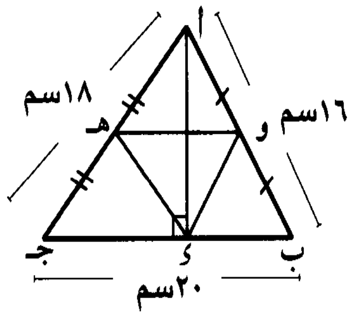
❷



أ جـ = ...سم ، ب ى = ...سم

م ى = ...ب ى ، م ى = ...سم

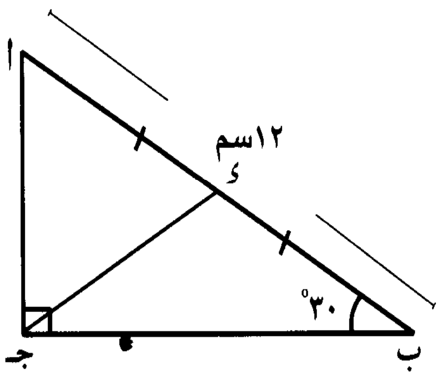
❸



ى و = ...سم ، ى هـ = ...سم ، و هـ = ...سم،

محيط △ ى هـ و = ...سم

❹



أ جـ = ...سم ، أ ى = ...سم

ب جـ = ...سم ، جـ ى = ...سم