أولا : القوى الصحيحة غير السالبة

تمهيد : $\frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٤}$ ، $\frac{-١}{٤} \times \frac{-١}{٤} \times \frac{-١}{٤} \times \frac{-١}{٤} \times \frac{-١}{٤} = \left(\frac{-١}{٤}\right)^{٥}$

(١) إذا كان : ا $\in$ ح ، ن $\in$ ص$^{+}$ فإن : ا^{ن} = ا × ا × ا × ٠٠٠ × ا

حيث ا مكرر كعامل ن من المرات و الرمز ا^{ن} يقرا : ا أس ن

، القوة النونية للعدد ا أو للأساس ا

(٢) ا^{صفر} = ١ بشرط ا $\neq$ صفر لان (صفر)^{صفر} غير معرف

مثلا : $\underbrace{\sqrt{٥} \times \sqrt{٥}}_{٥} \times \sqrt{٥} = ٥\sqrt{٥}$ ، $\underbrace{-\sqrt{٧} \times -\sqrt{٧}}_{٧} \times \underbrace{-\sqrt{٧} \times -\sqrt{٧}}_{٧} = ٤٩$

$٣^{صفر} = ١$ ، $(٢\sqrt{٥})^{صفر} = ١$ ، $(\sqrt{٧})^{صفر} = ١$ ، $\left(\frac{-١}{\sqrt{٥}}\right)^{صفر} = ١$

مثال : أوجد فى أبسط صورة $(\sqrt{٧})^{٣}$ ، $\left[\frac{-٢}{\sqrt{٣}}\right]^{٤}$ ، $[-٥\sqrt{٣}]^{صفر}$

الحل : $(\sqrt{٧})^{٣} = ٧\sqrt{٧}$

$\left[\frac{-٢}{\sqrt{٣}}\right]^{٤} = \frac{١٦}{٩}$ ، $[-٥\sqrt{٣}]^{صفر} = ١$

ثانيا : القوى الصحيحة السالبة

إذا كان أ عددا حقيقيا لا يساوى الصفر ، ن عددا صحيحا موجبا

فإن $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$ ، $أ^{-ن}$ تقرأ (أ أس سالب ن) ، $أ^{ن} = \frac{١}{أ^{-ن}}$

مثلا : $٣^{-٢} = \frac{١}{٣^{٢}} = \frac{١}{٩}$ ، $٧^{-٣} = \frac{١}{٧^{٣}} = \frac{١}{٣٤٣}$ ،

$(٢)^{-٣} = \frac{١}{٢^{٣}} = \frac{١}{٨}$ ، $س^{-٤} = \frac{١}{س^{٤}}$ ، $ص^{-ن} = \frac{١}{ص^{ن}}$

$(\sqrt{٣})^{-٤} = \frac{١}{(\sqrt{٣})^{٤}} = \frac{١}{٩}$ ، $\frac{١}{(-\sqrt{٣})^{-٣}} = (-\sqrt{٣})^{٣} = -٣\sqrt{٣}$

ملاحظة(١)

إذا كان أ $\in$ ح* ، ن $\in$ ص+ فإن $أ^{ن} \times أ^{-ن} = ١$

أى المعكوس الضربى للعدد الحقيقى $أ^{ن}$ هو $أ^{-ن}$

مثلا : $٥^{٢} \times ٥^{-٢} = ١$ ، $(\sqrt{٣})^{٥} \times (\sqrt{٣})^{-٥} = ١$

مثال: إذا كانت س = ٣ ، ص = $\sqrt{٢}$ ، فأوجد فى أبسط صورة قيمة كل من:

(١) $س^{-٢} ص^{٤}$ (٢) $(س^{-٢} \times ص^{٤})^{-٢}$ (٣) $\left(\frac{س}{ص}\right)^{-٢}$

الحل :

(١) $س^{-٢} ص^{٤} = \frac{ص^{٤}}{س^{٢}} = \frac{(\sqrt{٢})^{٤}}{٣^{٢}} = \frac{٢}{٩}$

(٢) $(س^{-٢} \times ص^{٤})^{-٢} = \left(\frac{ص^{٤}}{س^{٢}}\right)^{-٢} = \left(\frac{س^{٢}}{ص^{٤}}\right)^{٢} = \left(\frac{٢}{٩}\right)^{٢} = \frac{٤}{٨١}$

تابع الحل :

$$\left(\frac{س}{ص}\right)^{-٣} = \left(\frac{ص}{س}\right)^{٣} = \left(\frac{\sqrt{٢}}{٣}\right)^{٣} = \frac{٢\sqrt{٢}}{٢٧}$$

قواعد هامة

١- إذا كان : $أ^{م} = أ^{ن}$ فإن : م = ن لكل أ ∈ ع - { ٠ ، ١ ، -١ }

مثلا :إذا كان $٢^{س} = ٢^{ص}$ فإن س = ص

إذا كان $(\sqrt{٥})^{م} = (\sqrt{٥})^{٧}$ فإن م = ٧

٢- إذا كان $أ^{ن} = ب^{ن}$ حيث أ، ب عددان حقيقيان ، أ ب ≠ ٠ ، ن ∈ ص

فإن أ = ب لكل ن ∈ { ١ ، ٣ ، ٥ ، ... } أعداد فردية

، أ = ± ب لكل ن ∈ { ٠ ، ٢ ، ٤ ، ... } أعداد زوجية

مثلا : $س^{٥} = \frac{١}{٣٢}$ فإن $س^{٥} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٥}$ ∴ $س = \frac{١}{٢}$

٣- إذا كان $أ^{ن} = ب^{ن}$ حيث أ، ب عددان حقيقيان ، أ ب ≠ ٠ ، ن ∈ ص ، أ ≠ ± ب

فإن : ن = صفر

مثلا : $٣^{س-٤} = ٧^{س-٤}$ فإن : س - ٤ = ٠ \ س = ٤

ملاحظات : ١- $أ^{ن} = ١$ حيث أ ≠ ±١ ، أ ≠ ٠ فإن : ن = صفر

٢- $\sqrt{أ} \times \sqrt{أ} = أ$ ، $\sqrt{أ} = أ$ $\frac{١}{٢}$ مثلا : $\sqrt{٧} \times \sqrt{٧} = ٧$

$\sqrt[3]{أ} \times \sqrt[3]{أ} \times \sqrt[3]{أ} = أ$ ، $\sqrt[3]{أ} = أ$ ، $(\sqrt[3]{٥})^{٣} = ٥$ ، $(\sqrt[م]{أ})^{ن} = أ^{\frac{ن}{م}}$

، $\left(\frac{س}{ص}\right)^{م} = \left(\frac{ص}{س}\right)^{-م}$ مثلا $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{-٤} = \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٤}$

أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية في ح (حل المعادلات الاتية أو أوجد قيمة س) :

(١) $٢^{س+١} = ٣٢$ (٢) $٢^{س} \times ٣^{-س} = ١$ (٣) $٢^{س+١} - ٢^{س} = ٢$

(٤) $(\sqrt{٥})^{٣س-١} = ٥$ (٥) $٧^{س-٩} = ٥^{س-٩}$ (٦) $٢٥^{س} - ٦ \times ٥^{س} + ٥ = ٠$

الحل:

(١) $٢^{س+١} = ٣٢$ ∴ $٢^{س+١} = ٢^{٦}$

∵ الأساس = الأساس ∴ الأس = الأس ∴ س + ١ = ٦ ∴ س = ٥

(٢) $٢^{س} \times ٣^{-س} = ١ \longrightarrow \frac{٢^{س}}{٣^{س}} = ١ \longrightarrow \left(\frac{٢}{٣}\right)^{س} = ١ = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{صفر}$

(٣) $٢^{س+١} - ٢^{س} = ٢ \longrightarrow ٢^{س}(٢ - ١) = ٢ \longrightarrow ٢^{س} \times ١ = ٢$

$٢^{س} = ٢$ ∵ الأساس = الأساس ∴ الأس = الأس ∴ س = ١

(٤) $(\sqrt{٥})^{٣س-١} = ٥ \longrightarrow (\sqrt{٥})^{٣س-١} = (\sqrt{٥})^{٢}$

∵ الأساس = الأساس ∴ الأس = الأس ∴ ٣س - ١ = ٢ ∴ س = ١

(٥) $٧^{س-٩} = ٥^{س-٩} \longrightarrow$ الأساس ≠ الأساس ∴ الأس = صفر

∴ س - ٩ = ٠ ∴ س = ٩

(٦) $٢٥^{س} - ٦ \times ٥^{س} + ٥ = ٠$ بوضع $٥^{س} = ص$

$(٥^{س})^{٢} - ٦ \times ٥^{س} + ٥ = ٠$ ∴ $ص^{٢} - ٦ص + ٥ = ٠$

$(ص - ١)(ص - ٥) = ٠$ \ ص = ١ ، ص = ٥

\ $٥^{س} = ١ \longleftarrow ٥^{س} = ٥^{صفر} \longleftarrow$ س = صفر

أ، $٥^{س} = ٥ \longleftarrow$ س = ١

اختبر نفسك

حل المعادلات الآتية : س ∈ ح

[أ] $٧^{س - ٢} = \frac{١}{٤٩}$ [ب] $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س} = \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٣}$

[حـ] $٣^{س} + ١ = ٨٢$ [د] $٣^{س - ٣} = ٢^{٢س - ٦}$

قوانين القوى الصحيحة غير السالبة فى ح

إذا كان أ عددا حقيقيا ، م ، ن عددين غير سالبين فإن :

[١] $\boxed{أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}}$ حيث أ ≠ ٠ عندما م = ٠ ، ن = ٠

مثلا : $٥^{٣} \times ٥^{٢} = ٥^{٣+٢} = ٥^{٥}$ ، $٧^{٦} \times ٧^{٤} = ٧^{٦+٤} = ٧^{١٠}$

$(\sqrt{٣})^{٥} \times (\sqrt{٣})^{٢} = (\sqrt{٣})^{٥+٢} = (\sqrt{٣})^{٧}$

و بوجة عام :

إذا كان : أ عددا حقيقيا ، م ، ن ، هـ ، . . . ، ك أعداد غير سالبة

فإن : $أ^{م} \times أ^{ن} \times أ^{هـ} \times . . . \times أ^{ك} = أ^{م+ن+هـ+ . . . +ك}$ حيث أ ≠ ٠

مثلا : $س^{٥} \times س^{٣} \times س^{٤} \times س = س^{٥+٣+٤+١} = س^{١٣}$

[٢] $\boxed{أ^م \div أ^ن = أ^{م - ن}}$ ، حيث م ، ن عددين صحيحين غير سالبين ،

م $\geqslant$ ن ، أ $\in$ ح*

مثلا: $س^٨ \div س^٥ = س^{٨-٥} = س^٣$ ، $(\sqrt{٣})^٦ \div (\sqrt{٣})^٤ = (\sqrt{٣})^٢ = ٣$

ملاحظة : $أ^{صفر} = ١$ حيث أ $\neq$ صفر

مثلا: $٧^{صفر} = ١$ ، $(\sqrt{٥})^٣ \div (\sqrt{٥})^٣ = (\sqrt{٥})^{صفر} = ١$

[٣] $\boxed{(أ ب)^م = أ^م ب^م}$ حيث أ $\neq$ ٠ ، ب $\neq$ ٠ عندما م = ٠

مثلا: $(٣ \sqrt{٥})^ن = ٣^ن \times (\sqrt{٥})^ن$ ، $(٢ \times ٣)^٥ = ٢^٥ \times ٣^٥$

و بوجه عام :

إذا كان : أ ، ب ، حـ ، ... ، ك أعداد حقيقية ، م عددا صحيحا غير سالب

فإن : $(أ \times ب \times حـ \times ... \times ك)^م = أ^م \times ب^م \times حـ^م \times ... \times ك^م$

[٤] $\boxed{\left(\frac{أ}{ب}\right)^م = \frac{أ^م}{ب^م}}$ حيث ب $\neq$ ٠

مثلا: $\left(\frac{٢}{\sqrt{٥}}\right)^٤ = \frac{٢^٤}{(\sqrt{٥})^٤} = \frac{١٦}{٢٥}$ ، $\left(\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}\right)^٢ = \frac{٢^٢ \times (\sqrt{٣})^٢}{٣^٢}$

$= \frac{٤ \times ٣}{٩} = \frac{١٢}{٩} = \frac{٤}{٣}$

و بوجة عام :

إذا كان : أ ، ب ، حـ ، د ، ... ، ل ، ك أعداد حقيقية و كان م عددا حقيقيا غيرسالب فإن :

$$\left(\frac{أ \times ب \times ... \times ل}{حـ \times د \times ... \times ك}\right)^م = \frac{أ^م \times ب^م \times ... \times ل^م}{حـ^م \times د^م \times ... \times ك^م}$$

بحيث أن كلا من حـ ، د ، ... ، ك $\neq$ ٠

[٥] $\boxed{(أ^م)^ن = (أ^ن)^م = أ^{م \times ن}}$ حيث أ $\neq$ ٠

مثلا : $(٢^٢)^٣ = (٢^٣)^٢ = ٢^{٢ \times ٣} = ٢^٦ = ٦٤$

$((\sqrt{٥})^٢)^٢ = (\sqrt{٥})^{٢ \times ٢} = (\sqrt{٥})^٤ = ٢٥$

$\boxed{نتيجة}$ إذا كان أ ، ح $\in$ ، م ، ن عددين صحيحين غير سالبين
فإن $(أ^م ب^ك)^ن = أ^{م ن} ب^{ك ن}$ بحيث أ $\neq$ ٠ ، ب $\neq$ ٠

مثلا : $(٢^٣ \times (\sqrt{٣})^٤ \times (\sqrt{٥})^٦)^س = ٢^{٢ س} \times (\sqrt{٣})^{٤ س} \times (\sqrt{٥})^{٦ س}$

[ملخص قوانين الأسس] إذا كان أ ، ب $\in$ ح*، م ، ن $\in$ ص فإن:

[١] $أ^م \times أ^ن = أ^{م + ن}$

[٢] $أ^م \div أ^ن = أ^{م - ن}$

[٣] $(أ ب)^م = أ^م ب^م$

[٤] $\left[\frac{أ}{ب}\right]^م = \frac{أ^م}{ب^م}$ ، ب $\neq$ ٠

[٥] $(أ^م)^ن = (أ^ن)^م = أ^{م \times ن}$

اختصر لأبسط صورة :
$$\frac{(\sqrt{٣})^٥ \times (\sqrt{٣})^٣}{(\sqrt{٣})^٤}$$

الحل:
$$\frac{(\sqrt{٣})^٥ \times (\sqrt{٣})^٣}{(\sqrt{٣})^٤} = (\sqrt{٣})^{٥ + ٣ - ٤} = (\sqrt{٣})^٤ = ٩$$

إختصر لابسط صورة $\frac{٥^{٣ن+١} \times ٢٧^{ن}}{(١٥)^{٣ن}}$

الحل : $= \frac{٥^{٣ن+١} \times ٣^{٣ن}}{٣^{٣ن} \times ٥^{٣}} = ٥^{٣ن+١-٣ن} \times ٣^{٣ن-٣ن}$

$= ٥ \times ٣^{صفر} = ٥ \times ١ = ٥$

تمارين على القوى الصحيحة السالبة و غير السالبة

من كتاب المدرسة

أولاً اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة:

① أى مما يأتى هو الأقرب إلى $١١^{٢} + ٩^{٢}$؟

أ $٢٢ + ١٨$ ب $١١^{٢} + ٩^{٢}$ جـ $١٢٠ + ٢٠$ د $١٢٠ + ٨٠$

② قيمة المقدار: $(٢)^{٢٠} + (٢)^{٢١}$ تساوى:

أ ٢×٢^{٤٠} ب ٢×٢^{٤١} جـ ٣×٢^{٢٠} د ٣×٢^{٢١}

③ قيمة المقدار: $(٣)^{صفر} + (-\frac{١}{\sqrt{٣}})^{٢} + \frac{١}{\sqrt[٣]{-٢٧}}$ تساوى:

أ صفر ب $\frac{١}{٣}$ جـ ١ د ٣

④ سدس العدد: $٢^{١٢} \times ٣^{١٢}$ هو:

أ $٦^{٢}$ ب $٦^{٤}$ جـ $٦^{١١}$ د $٦^{٢٣}$

⑤ قيمة المقدار: $٢^{٥} + (\sqrt{٢})^{١٠}$ يساوي:

أ $٢^{٦}$ ب $٢^{١٠}$ جـ $(\sqrt{٢})^{١٥}$ د $(\sqrt{٢})^{٢٠}$

ثانياً اختصر لأبسط صورة:

① $(\sqrt{٢})^{٢} \times (\sqrt{٢})^{٤}$

② $(-\sqrt{٥})^{٩} \div (-\sqrt{٥})^{٥}$

③ $\left(\frac{٣\sqrt{٢}}{٢\sqrt{٣}}\right)^{٤}$

④ $\frac{(\sqrt{٣})^{٧} \times (\sqrt{٣})^{٨}}{(\sqrt{٣})^{٦}}$

حاول

① إذا كان أ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ب = -١ فأوجد قيمة ٧ أ^{٦} + (١ - ب)$^{-٣}$

② إذا كان أ = $\sqrt{٣}$ ، ب = $\sqrt{٣}$ فأوجد قيمة:

(أ) أ^{٤} - ب^{٤}. (ب) $\frac{أ^{٤}}{ب^{٤}}$.

③ إذا كان س = ٢$\sqrt{٢}$ ، ص = ٣. فأوجد قيمة المقدار: (س^{٢} - ص^{٢})^{٢}

④ إذا كان $\left(\sqrt{\frac{٣}{٢}}\right)^{س} = \frac{٤}{٩}$ فأوجد قيمة $\left(\frac{٣}{٢}\right)^{س+١٠}$

قوانين القوى الصحيحة السالبة فى ح

تعميم قوانين الأسس :

إذا كان أ ، ب ∈ ح* ، م ، ن ∈ ص فإن :

(١) $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$

(٢) $أ^{م} \div أ^{ن} = أ^{م-ن}$

(٣) $(أ ب)^{ن} = أ^{ن} \times ب^{ن}$

(٤) $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} = \frac{أ^{ن}}{ب^{ن}}$

(٥) $(أ^{م})^{ن} = أ^{م \times ن}$

(٦) $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} = \left(\frac{ب}{أ}\right)^{-ن}$

ملاحظات :

① إذا كان $أ \in ح^*$، $ن \in ص_+$ فإن $أ^{ن}$، $أ^{-ن}$ كل منهما معكوس ضربي للآخر، فإن $أ^{ن} \times أ^{-ن} = ١$

مثال: $(\sqrt{٣})^{٥} \times (\sqrt{٣})^{-٥} = ١$

② إذا كان $أ، ب \in ح^*$، $ن \in ص_+$ فإن $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} = \left(\frac{ب}{أ}\right)^{-ن}$

مثال: $\left(\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}}\right)^{٥} = \left(\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}\right)^{-٥}$ ، حيث: $\left(\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}}\right)^{٥} \times \left(\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}\right)^{-٥} = ١$

أوجد في أبسط صورة قيمة ما يأتي : (١) $٣\,(\sqrt{٣})^{-١}$ (٢) $\left(\frac{\sqrt{٥}}{١٠}\right)^{-٤}$ (٣) $٢ \div ٢^{-٣}$

الحل :

(١) $٣\,(\sqrt{٣})^{-١} = \frac{٣}{\sqrt{٣}} = \frac{٣}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٣} = \sqrt{٣}$

(٢) $\left(\frac{\sqrt{٥}}{٥}\right)^{-٤} = \left(\frac{٥}{\sqrt{٥}}\right)^{٤} = \frac{٦٢٥}{٢٥} = ٢٥$

(٣) $٢ \div ٢^{-٣} = ٢ \times ٢^{٣} = ٢^{٤} = ١٦$

اختصر لأبسط صورة $\frac{(١٥)^{-٢} \times (\sqrt{٥})^{٣} \times (٣)^{٣}}{٩ \times (\sqrt{٥})^{-٣}}$

الحل :

المقدار $= \frac{(٣)^{-٢} \times (٥)^{-٢} \times (\sqrt{٥})^{٣} \times (٣)^{٣}}{(٣)^{٢} \times (\sqrt{٥})^{-٣}} = (٣)^{-٢+٣-٢} \times (٥)^{-٢} \times (\sqrt{٥})^{٣+٣}$

$= (٣)^{-١} \times (٥)^{-٢} \times (\sqrt{٥})^{٦} = \frac{١}{٣} \times (٥)^{-٢} \times (٥)^{٣} = \frac{١}{٣} \times (٥)^{١} = \frac{٥}{٣}$

إذا كان $٢^{\text{س}} = ٣$ أوجد قيمة $\dfrac{٤^{\text{س}-١} \times ٢^{٤\text{س}+١}}{٨^{\text{س}}}$

الحل :

$$= \frac{(٢^٢)^{\text{س}-١} \times ٢^{٤\text{س}+١}}{(٢^٣)^{\text{س}}} = \frac{٢^{٢\text{س}-٢} \times ٢^{٤\text{س}+١}}{٢^{٣\text{س}}} = \frac{٢^{٢\text{س}-٢+٤\text{س}+١}}{٢^{٣\text{س}}}$$

$$= ٢^{٦\text{س}-١} \times ٢^{-٣\text{س}} = ٢^{٦\text{س}-١-٣\text{س}} = ٢^{٣\text{س}-١} = ٢^{٣\text{س}} \times ٢^{-١}$$

$$= (٢^{\text{س}})^٣ \times ٢^{-١} = ٣^٣ \times ٢^{-١} = \frac{٣^٣}{٢} = \frac{٢٧}{٢}$$

احسب قيمة س إذا كان $\left(\dfrac{٣}{٥}\right)^{\text{س}} = \dfrac{٩^{\text{ن}+٢} \times ٢٥^{\text{ن}-٢}}{(١٥)^{٢\text{ن}}}$

الحل :

$$\left(\frac{٣}{٥}\right)^{\text{س}} = \frac{(٣^٢)^{\text{ن}+٢} \times (٥^٢)^{\text{ن}-٢}}{(٣ \times ٥)^{٢\text{ن}}} = \frac{٣^{٢(\text{ن}+٢)} \times ٥^{٢(\text{ن}-٢)}}{٣^{٢\text{ن}} \times ٥^{٢\text{ن}}}$$

$$= \frac{٣^{٢\text{ن}+٤} \times ٥^{٢\text{ن}-٤}}{٣^{٢\text{ن}} \times ٥^{٢\text{ن}}} = ٣^{٢\text{ن}+٤-٢\text{ن}} \times ٥^{٢\text{ن}-٤-٢\text{ن}}$$

$$= ٣^٤ \times ٥^{-٤} = \frac{٣^٤}{٥^٤} = \left(\frac{٣}{٥}\right)^٤$$

$$\because \left(\frac{٣}{٥}\right)^{\text{س}} = \left(\frac{٣}{٥}\right)^٤ \quad \therefore \text{س} = ٤$$

مثال : إذا كان $٢٥ \times ٣^{\text{س}-١} = ٩ \times ٥^{\text{س}-١}$ فأوجد قيمة س [س = ٣]

تمارين على قوانين القوى الصحيحة غير السالبة و السالبة فى ح

من كتاب المدرسة

أولاً: أكمل ما يأتى:

١) أبسط صورة للمقدار: $٢^{صفر} + (٢)^{-١} - \left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{-٢} =$ ....

٢) إذا كانت $س = (\sqrt{٢} + ٢)^{٥}$ ، $ص = (\sqrt{٢} + ٢)^{-٥}$ فإن س ص = ...

٣) $أ^{-٢} + ١ = أ^{-٢}$ (.......... + ...) حيث $أ \neq ٠$

٤) إذا كانت $٢^{س} \times ٥^{س-١} = ٢,٥$ فإن س = ...

٥) إذا كانت $٤^{س-١٠} = \frac{١}{١٦}$ فإن $\sqrt{س} =$ ....

ثانياً: اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة:

١) إذا كان $٥^{س} = ٤$ فإن $٥^{س-١}$ تساوى:
أ) ١,٢٥ ب) ٠,٨ جـ) ٠,١٢٥ د) ٠,٠٨

٢) $(\sqrt{٣} + \sqrt{٢})^{٩} (\sqrt{٣} - \sqrt{٢})^{٩}$ يساوى:
أ) ١ ب) $\sqrt{٥}$ جـ) $\sqrt{٦}$ د) ٥

٣) إذا كان $٣^{س} = ٥$، $\frac{١}{٣^{ص}} = ٧$ فإن $٣^{س+ص} =$ ....
أ) $\frac{٥}{٧}$ ب) $\frac{٧}{٥}$ جـ) ٢ د) ١٢

٤) إذا كان $٢^{س-١} \times ٣^{١-س} = \frac{٩}{٤}$ فإن س = ...
أ) -٣ ب) -١ جـ) ١ د) ٣

ثالثاً: أوجد فى أبسط صورة قيمة كل ممايأتى:

① $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٣}\right)^{-٥}$

② $(\sqrt{٣})^{-٤} \times (-\sqrt{٣})^{٤}$

③ $\left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)^{٥} \div \left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$

رابعاً: اختصر كلاً مما يأتى إلى أبسط صورة:

① $\frac{(\sqrt{٣})^{-٥} \times (\sqrt{٣})^{-٤}}{(\sqrt{٣})^{-١٠}}$

② $\frac{(١٠)^{٢} \times (١٠)^{-٧}}{(٠٫١)^{٢} \times ٠٫٠٠١}$

خامساً: أوجد قيمة س فى كل ممايأتى:

① $٢^{\text{س}} = ٣٢$

② $٢^{\text{س}-٣} = ١$

③ $٣^{\text{س}-٢} = \frac{١}{٩}$

④ $\left(\frac{٢}{٥}\right)^{٢\text{س}-١} = \frac{٨}{١٢٥}$

⑤ $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{\text{س}-٤} = ٢\frac{١}{٤}$

⑥ $٥^{\text{س}^{٢}-٤} = ٧^{٤-\text{س}^{٢}}$

سادساً:

① إذا كان $٣^{\text{س}} = ٢٧$، $٤^{\text{س}+\text{ص}} = ١$. فأوجد قيمة س، ص.

② أثبت أن: $\frac{(٢٧)^{\text{س}-١} \times ٨^{\text{س}}}{(٢\sqrt{٢})^{٢\text{س}} \times (٣\sqrt{٣})^{٢\text{س}}} = \frac{١}{٢٧}$

③ إذا كان: $\frac{٨^{\text{س}} \times ٩^{\text{س}}}{(١٨)^{\text{س}}} = ٦٤$ فأوجد س ثم أوجد قيمة $(٤)^{-\text{س}}$

④ اختصر: $\frac{٤^{\text{س}+١} \times ٩^{\text{س}-٢}}{٦^{٢\text{س}}}$ فى أبسط صورة ثم احسب قيم الناتج عند س $=١$.

اختبر نفسك

(١) ضع كل مما ياتي فى أبسط صورة : س ، ن $\in$ ص

[أ] $\dfrac{٤^{\text{س}+١} \times ٩^{\text{س}+٢}}{٦^{٢\text{س}}}$ [ب] $\dfrac{٤^{\text{ن}} \times ٣^{\text{ن}+١} \times \sqrt{٣}}{(١٢)^{\text{ن}} \times \sqrt{٢}}$

(٢) حل المعادلات الآتية : س $\in$ ص

[أ] $٧^{\text{س}-٢} = \dfrac{١}{٤٩}$ [ب] $\left(\dfrac{٢}{٣}\right)^{\text{س}} = \left(\dfrac{٣}{٢}\right)^{٣}$

[جـ] $٣^{\text{س}} + ١ = ٨٢$ [د] $٣^{\text{س}-٣} = ٢^{٢\text{س}-٦}$

(٣) أثبت أن : $\dfrac{٤^{\text{ن}+١} \times ٦^{١-٢\text{ن}}}{٩^{١-\text{ن}}} = \dfrac{٨}{٣}$ حيث ن $\in$ ص$^{+}$

العمليات الحسابية على القوى الصحيحة

مثال : أوجد فى أبسط صورة :

(١) $٣^{٢} \div ٢^{-٢} = ٣^{٢} \times ٢^{٢} = ٩ \times ٤ = ٣٦$

(٢) $\dfrac{١}{\sqrt{٢}} \div ٥\sqrt{٢} = \dfrac{١}{\sqrt{٢}} \times \dfrac{١}{٥\sqrt{٢}} = \dfrac{١}{١٠}$

(٣) $٣^{\text{س}+١} + ٣^{\text{س}-١} = ٣^{\text{س}}\left(٣ + ٣^{-١}\right) = ٣^{\text{س}}\left(٣ + \dfrac{١}{٣}\right) = ٣^{\text{س}} \times \dfrac{١٠}{٣}$

$= ٣^{\text{س}} \times ٣^{-١} \times ١٠ = ٣^{\text{س}-١} \times ١٠$

حل أخر : $٣^{\text{س}-١}\left(٣^{٢} + ١\right) = ٣^{\text{س}-١}\left(٩ + ١\right) = ٣^{\text{س}-١} \times ١٠$

(٤) $\dfrac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}} + \dfrac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}} = \dfrac{٢ + ٣}{\sqrt{٦}} = \dfrac{٥}{\sqrt{٦}}$

الايميل / elmnfalty26@yahoo.com

خطوات إجراء العمليات الحسابية:

يجب ترتيب العمليات كالتالي :

1. إجراء العمليات داخل الأقواس الداخلية ثم الخارجية إن وجدت.
2. حساب قوى الأعداد.
3. إجراء عمليات الضرب أو القسمة من اليمين إلى اليسار.
4. إجراء عمليات الجمع أو الطرح من اليمين إلى اليسار.

مثال : أوجد ناتج كلا مما يأتى فى أبسط صورة : (للتحقق من الناتج استخدم الآلة الحاسبة)

(١) $٣ \times ٢^{٢} - ٦ \div ٣ \times ٥ + ٤$

الحل : $٣ \times ٤ - ٢ \times ٥ + ٤ = ١٢ - ١٠ + ٤ = ٢ + ٤ = ٦$

(٢) $٣^{-٢} \times ٥^{-٣} \div ١٥^{-٤}$

الحل : $٣^{-٢} \times ٥^{-٣} \times ١٥^{٤} = ٣^{-٢} \times ٥^{-٣} \times ٣^{٤} \times ٥^{٤}$

$= ٣^{٤-٢} \times ٥^{٤-٣} = ٣ \times ٥ = ١٥$

(٣) $(\sqrt{٧})^{٥} \div ٧\sqrt{٧} + ٢\sqrt{٥} \times \sqrt{٥}$

الحل : $٤٩\sqrt{٧} \div ٧\sqrt{٧} + ٢ \times ٥ = ٧ + ١٠ = ١٧$

(٤) $\dfrac{٥(\sqrt{٥})^{٣} \div ٣\sqrt{٥}}{٢\sqrt{٥} + (\sqrt{٥} - ١)^{٢}}$

الحل : $\dfrac{٢٥\sqrt{٥} \div ٣\sqrt{٥}}{٢\sqrt{٥} + (٥ + ١ - ٢\sqrt{٥})} = \dfrac{٢٥\sqrt{٥} \div ٣\sqrt{٥}}{٢\sqrt{٥} + (٦ - ٢\sqrt{٥})}$

$= \dfrac{٢٥ \div ٣}{٦} = \dfrac{٢٥}{١٨}$

(٥) $\dfrac{٥ \times ٧^{س+١} - ٤ \times ٧^{س-١}}{٣ \times ٧^{س} + ٢ \times ٧^{س-٢}}$

الحل : $= \dfrac{\cancel{٧^{س}}\,(٥ \times ٧ - ٤ \times ٧^{-١})}{\cancel{٧^{س}}\,(٣ + ٢ \times ٧^{-٢})} = \dfrac{٣٥ - \frac{٤}{٧}}{٣ + \frac{٢}{٤٩}} = \left(\dfrac{٢٤٥ - ٤}{٧}\right) \div \left(\dfrac{١٤٧ - ٢}{٤٩}\right)$

$= \dfrac{٢٤١}{٧} \div \dfrac{١٤٥}{٤٩} = ١١,٦$

مثال : إذا كان أ $= \sqrt{٧}$ ، ب $= \sqrt{٥}$ فأوجد القيمة العددية لكل من :

(١) $\dfrac{أ^{٤} - ب^{٤}}{أ^{٢} + ب^{٢}}$ (٢) $\dfrac{أ^{٣} - ب^{٣}}{أ + ب}$

الحل : (١) $\dfrac{أ^{٤} - ب^{٤}}{أ^{٢} + ب^{٢}} = \dfrac{\{أ^{٢} - ب^{٢}\}\{أ^{٢} + ب^{٢}\}}{\{أ^{٢} + ب^{٢}\}} = أ^{٢} - ب^{٢} = \{\sqrt{٧}\}^{٢} - \{\sqrt{٥}\}^{٢}$

$= ٧ + ٥ = ٢$

(٢) $\dfrac{أ^{٣} - ب^{٣}}{أ + ب} = \dfrac{\{أ - ب\}\{أ^{٢} - ٢أب + ب^{٢}\}}{\{أ + ب\}} = أ^{٢} - ٢أب + ب^{٢}$

$= \{\sqrt{٧}\}^{٢} - ٢ \times \sqrt{٧} \times \sqrt{٥} + \{\sqrt{٥}\}^{٢}$

$= ٧ - ٢\sqrt{٣٥} + ٥ = ١٢ - ٢\sqrt{٣٥}$

مثال : إذا كان $٣^{س+١} + ٣^{س-١} = ١٠$ فأوجد قيمة س ثم تحقق من صحة الحل

الحل : $٣^{س}\,(٣ + ٣^{-١}) = ٣^{س}\,(٣ + \frac{١}{٣}) = ٣^{س} \times \dfrac{١٠}{٣} = ١٠$

∴ $٣^{س} = ١٠ \times \frac{٣}{١٠} = ٣$ ∴ الأساس = الأساس ∵ الأس = الأس ∴ س = ١

التحقيق : الطرف الأيمن = $٣^{س+١} + ٣^{س-١} = ٣^{١+١} + ٣^{١-١} = ٣^{٢} + ٣^{٠}$

$= ٩ + ١ = ١٠ =$ الطرف الأيسر

مثال : إذا كان $\frac{٢^{س+١} - ٢^{س}}{٢^{س} - ٢^{س-١}} = ٢^{س-٢}$ فأوجد قيمة س

الحل : $\frac{٢^{س+١} - ٢^{س}}{٢^{س} - ٢^{س-١}} = \frac{٢^{س}(٢ - ١)}{٢^{س}(١ - ٢^{-١})} = \frac{\cancel{٢^{س}} \times ١}{\cancel{٢^{س}}(١ - \frac{١}{٢})} = \frac{١}{\frac{١}{٢}} = ٢$

∴ $٢ = ٢^{س-٢}$ ∴ ١ = س − ٢ ∴ س = ٣

مثال : أثبت أن $\frac{٢^{٣س+٣} - ٢^{٣س+١}}{٤ \times ٢^{٣س} - ٦ \times ٢^{٣س-١}} = ٦$

الحل : $\frac{٢^{٣س}(٢^{٣} - ٢)}{٢^{٣س}(٤ - ٦ \times ٢^{-١})} = \frac{٨ - ٢}{٤ - ٦ \times \frac{١}{٢}} = \frac{٦}{٤ - ٣} = ٦$

مثال : (الربط بالأعمال التجارية)

إذا كان حـ = م $(١ + ر)^{ن}$ حيث (حـ) جملة المبلغ م بالجنيه، (ر) ربح الجنيه فى السنة، (ن) عدد السنوات. فأوجد (حـ) لأقرب جنيه، حيث أن م = $٢,٥ \times ١٠^{٤}$، ر = $٩,٨ \times ١٠^{-٢}$، ن = ١٢.

الحل : حـ = م $(١ + ر)^{ن} = ٢,٥ \times ١٠^{٤}(١ + ٩,٨ \times ١٠^{-٢})^{١٢}$

$= ٢,٥ \times ١٠^{٤}(١ + ٠,٠٩٨)^{١٢}$

$= ٢,٥ \times ١٠^{٤} \times (١,٠٩٨)^{١٢} \approx ٧٦٧٦٦$ جنية

تمارين عامة من الكتاب المدرسى

أولاً: أكمل ما يأتى:

١) أبسط صورة للمقدار: $٢^{-٣} \times ٢^{-٢} \div ٤^{-٣} =$ ....

٢) أبسط صورة للمقدار: $(٣^{-٢})^{٣} \div ٩^{-٢} \times (-٢)^{-١} =$ ....

٣) أبسط صورة للمقدار: $٤^{٣} \times ٣^{-٢} \times (\sqrt[٣]{-٨})^{-٥} =$ ....

٤) إذا كان: $٣^{س} + ٣^{س} + ٣^{س} = ١$ فإن س = ...

٥) $\frac{٢^{س} \times ٣^{س}}{(١٢)^{س}} = \frac{١}{٢}$ فإن س = ...

ثانياً: اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة:

١) المقدار: $\frac{٣^{س} \times ٣^{س} \times ٣^{س}}{٣^{س} + ٣^{س} + ٣^{س}}$ يساوى

أ) $٣^{٢س - ١}$ ب) $٣^{١ - ٢س}$ جـ) $٣^{س^{٢} - ٢س}$ د) $٣^{٢س - س^{٢}}$

٢) القيمة العددية للمقدار: $\frac{٢^{٢ن + ١} \times ٥^{٢ن + ١}}{١٠^{٢ن}}$ تساوى:

أ) $\frac{١}{١٠}$ ب) ٧ جـ) ١٠ د) ١٠٠

٣) $(٥^{س + ٢} - ٥^{س + ١}) \div ٥^{س} =$

أ) ٥ ب) ١٠ جـ) ١٥ د) ٢٠

٤) قيمة س التى تحقق المعادلة: $٢^{س} + ٢^{س + ١} = \frac{٣}{٢}$ هى:

أ) -٢ ب) -١ جـ) ١ د) ٢

ثالثاً:

① ضع الأقواس المناسبة لكل مما يأتى حتى تكون العبارة الرياضية صحيحة:

أ $\sqrt{3}^{\,2} + \sqrt{15} \div \frac{1}{\sqrt{5}} - \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

ب $\frac{1}{2}^{-4} - \sqrt{2}^{\,4} \div \sqrt[3]{8} \times \frac{1}{\sqrt{5}}^{-2} = 30$

جـ $24 \div \sqrt[3]{27} + \frac{1}{\sqrt{3}}^{-4} \times \sqrt{\frac{1}{2}}^{\,-2} = 4$

② إذا كانت $\text{س} = 2 + \sqrt{3}$ ، $\text{ص} = 2 - \sqrt{3}$ ، فأوجد قيمة المقدار: $\frac{\text{س}^7 \text{ص}^8 - \text{ص}}{(\text{س} + \text{ص})^9}$ في أبسط صورة.

③ **أثبت أن:**

أ $\frac{3^{\text{س}+1} + 3^{\text{س}+2}}{3^{\text{س}}} = 12$

ب $\frac{16 \times 2^{2\text{س}} - 2 \times 4^{\text{س}}}{2 \times 4^{\text{س}} + 5 \times 2^{2\text{س}}} = 2$

④ **أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:**

أ $2^{\text{س}+1} - 2^{\text{س}} = 2$

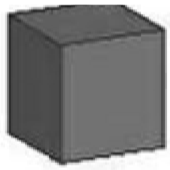
ب $3^{\text{س}+1} - 3^{\text{س}-2} = 78$

جـ $2^{2\text{س}+1} + 2^{2\text{س}-1} = 10$

د $9^{\text{س}} - 4 \times 3^{\text{س}} + 3 = 0$

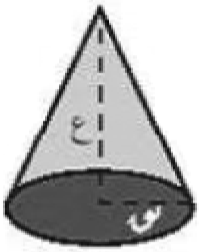
⑤ **إذا كان:** $\frac{(27)^{\text{س}-1} \div (3)^{-2\text{س}}}{(2\sqrt{2})^{2\text{س}} \times (3\sqrt{3})^{2\text{س}}} = 3^{\text{س}}$. فأوجد قيمة س.

الربط بالهندسة



⑥ إذا كانت المساحة الكلية لمكعب تساوى $3{,}375 \times 10^{2}$ سم²

فأوجد: أ طول حرف المكعب. ب حجم المكعب.



⑦ إذا كان حجم المخروط الدائرى القائم يعطى بالعلاقة:

ح = $\frac{1}{3}$ ط نق² ع. فأوجد ارتفاع المخروط ع إذا علم أن حجم المخروط $7{,}7 \times 10^{2}$ سم³ وطول قطر قاعدته ١٤ سم. [اعتبر $\pi = \frac{22}{7}$]

⑧ إذا كان حجم الكرة ح = $\frac{4}{3}$ π نق³

فأوجد طول نصف قطر كرة حجمها $3{,}8808 \times 10^{4}$ سم³ [اعتبر $\pi = \frac{22}{7}$]

⑨ إذا كان: حـ = $\frac{أ(ر^{ن} - 1)}{ر - 1}$ وكانت أ = ١٢٨، ر = $\frac{3}{2}$، حـ = $6{,}305 \times 10^{3}$؛ فأوجد ن.

مثال : أوجد ناتج المقدار

$$\frac{(15)^{-2} \times (\sqrt{5})^{3} \times (3)^{3}}{9 \times (\sqrt{5})^{-3}}$$

اختبر نفسك

① **أوجد** فى أبسط صورة كل من: $(\sqrt{3} + 2)^{11}$ $(\sqrt{3} - 2)^{11}$

② **إذا كان** أ = $\sqrt{7}$ ، ب = $(\sqrt{7})^{-1}$ ؛ فأوجد قيمة: أ^{101} ب^{100}

③ **أوجد** فى أبسط صورة قيمة:

$$\frac{1}{1-\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{9}-\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{15}}$$