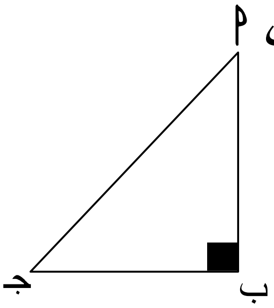
النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

<u>تمهيد</u> : فى الشكل المقابل : م ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب : نلاحظ ما يأتي



(١) $\text{م ب} < \text{م جـ}$ ، $\text{ب جـ} < \text{م جـ}$ ، $\text{م جـ} > \text{م ب}$

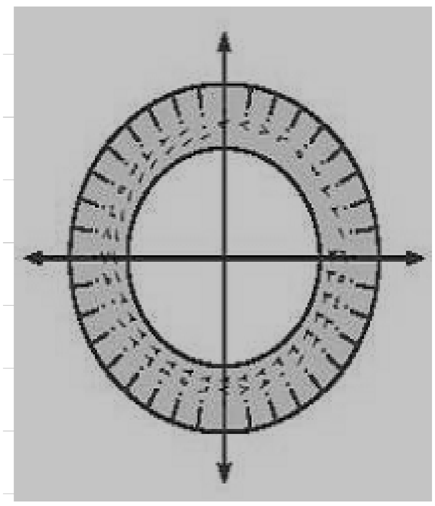
(٢) $\measuredangle$ م ، $\measuredangle$ جـ زاويتان حادتان

(٣) $\frac{\text{م ب}}{\text{م جـ}} < ١$ ، $\frac{\text{ب جـ}}{\text{م جـ}} < ١$ ، $\frac{\text{م جـ}}{\text{م ب}} > ١$

(٤) $\frac{\text{م ب}}{\text{م جـ}} \div \frac{\text{ب جـ}}{\text{م جـ}} = \frac{\text{م ب}}{\text{ب جـ}}$ ، $\frac{\text{م ب}}{\text{م جـ}} + \frac{\text{ب جـ}}{\text{م جـ}} > ١$ ، $\frac{(\text{م ب})^{٢}}{(\text{م جـ})^{٢}} + \frac{(\text{ب جـ})^{٢}}{(\text{م جـ})^{٢}} = \frac{(\text{م ب})^{٢} + (\text{ب جـ})^{٢}}{(\text{م جـ})^{٢}} = ١$

(٥) $(\text{م ب})^{٢} + (\text{ب جـ})^{٢} = (\text{م جـ})^{٢}$ **(نظرية فيثاغورث)**

القياس الستيني للزوايا



مجموع الزوايا المتجمعة حول نقطة = ٣٦٠ °

المحورين يقسمان الزوايا الى أربع أرباع كل منها يحتوى على ٩٠ °

وحدة القياس الستينى (الدرجة) ، الدرجة تقسم إلى أجزاء من الدرجة

الدرجة = ٦٠ دقيقة ، الدقيقة = ٦٠ ثانية

$^{\circ} = ٦٠'$ ، $١' = ٦٠''$ ، $١' = \left(\frac{١}{٦٠}\right)^{\circ}$ ، $١'' = \left(\frac{١}{٦٠}\right)'$

إعداد / خالد المنفلوطي ت / ٠١٠٦٥٢٢١٣٨ الايميل / elmnfalty26@yahoo.com

ملحوظة : يمكن تحويل أجزاء من الدرجة ثواني و دقائق الى درجات أو العكس

[١] التحويل أجزاء الدرجة من الثوانى و الدقائق الى درجات :

مثال: اكتب كلا من الزوايا التالية بالدرجات: [١] ٥٠″ ٤٠′ ٣٤° [٢] ٢٤′ ١٦° [٣] ٤٢″ ٧°

الحل : [١] ٥٠″ = (٥٠ / ٦٠)′ = (٥٠ / ٦٠ × ١ / ٦٠)° = ٠,٠١٣٨٨٨

٤٠′ = (٤٠ / ٦٠)° = ٠,٦٦٦٦٦٦٦

∴ ٥٠″ ٤٠′ ٣٤° = ٠,٠١٣٨٨٨ + ٠,٦٦٦٦٦٦ + ٣٤ = ٣٤,٦٨٠٥٤ ≃ ٣٥°

[٢] ٢٤′ = (٢٤ / ٦٠)° = ٠,٤°   ∴ ٢٤′ ١٦° = ٠,٤ + ١٦ = ١٦,٤°

[٣] ٤٢″ = (٤٢ / ١٢٠)° = ٠,٣٥°   ∴ ٤٢″ ٧° = ٠,٣٥ + ٧ = ٧,٣٥°

---

[٢] تحويل كسور الدرجة الى دقائق و ثواني :

ملحوظة: نكتب كالتالي:

وووه ← shift ← = ← كسور الدرجة →

٣٦′ ٣٤° : وووه ← shift ← = ← ٣٤,٦° →

مثال: اكتب كلا من الزوايا التالية بالدرجات و الدقائق و الثواني:

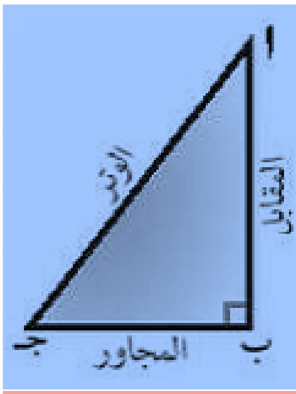
[١] ٤٥,٦°   [٢] ٥٦,٠٦°   [٣] ٧٦,٢٤٥°

الحل :

[١] ٤٥,٦° = ٣٦′ ٤٥°   [٢] ٥٦,٠٦° = ٣٦″ ٣′ ٥٦°

[٣] ٧٦,٢٤٥° = ٤٢″ ١٤′ ٧٦°

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة



الشكل المقابل:

يمثل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في ب حيث أ ، جـ زاويتان حادتان متتامتان؛ فالضلع المقابل للزاوية جـ يسمى بالمقابل ، والضلع المجاور للزاوية جـ يسمى بالمجاور ، والضلع المقابل للزاوية القائمة يسمى بالوتر.

وستعرف الآن على النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة؛ وهي:

(١) جيب الزاوية: ويرمز له بالعربية جا، وبالإنجليزية sin .

(٢) جيب تمام الزاوية: ويرمز له بالعربية جتا، وبالإنجليزية cos .

(٣) ظل الزاوية: ويرمز له بالعربية ظا، وبالإنجليزية tan .

جا جـ	=	$\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$	=	$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$
جتا جـ	=	$\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$	=	$\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$
ظا جـ	=	$\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$	=	$\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$

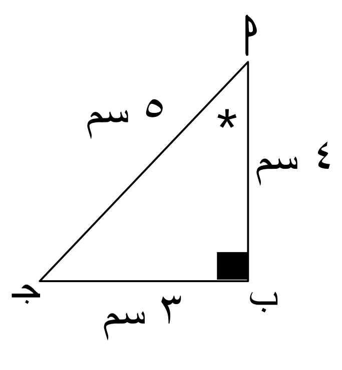
مثال : أوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية م [جا م ، حتا م ، ظا م]

الحل :

$$\text{جا م} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{حتا م} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{ظا م} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{3}{4}$$



مثال : أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى جـ ، أ ب = ١٧ سم ، ب جـ = ١٥ سم

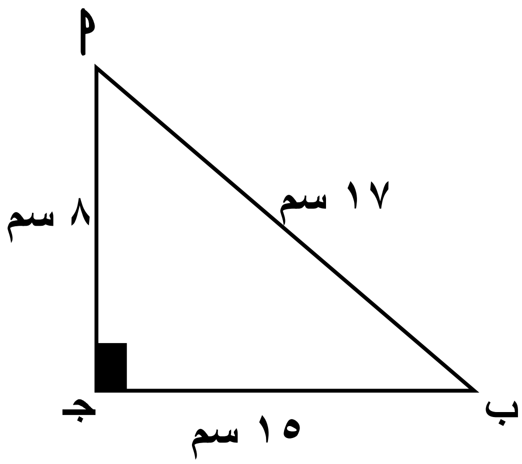
(١) أوجد طول $\overline{\text{أ جـ}}$

(٢) أوجد كلا من : جا أ ، حتا أ ، ظا أ

(٣) أوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية ب

(٤) أثبت أن : جا أ حتا ب + حتا أ جا ب = ١

(٥) أوجد : ١ + ظا^{٢} ب



الحل (١) ∵ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى جـ

∴ (أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} ـ (ب جـ)^{٢} = (١٧)^{٢} ـ (١٥)^{٢}

= ٢٨٩ ـ ٢٢٥ = ٦٤ ∴ أ جـ = ٨ سم

(٢) جا أ = $\frac{١٥}{١٧}$ ، حتا أ = $\frac{٨}{١٧}$ ، ظا أ = $\frac{١٥}{٨}$

(٣) جا ب = $\frac{٨}{١٧}$ ، حتا ب = $\frac{١٥}{١٧}$ ، ظا ب = $\frac{٨}{١٥}$

(٤) الطرف الأيمن = جا أ حتا ب + حتا أ جا ب = $\frac{١٥}{١٧} \times \frac{١٥}{١٧} + \frac{٨}{١٧} \times \frac{٨}{١٧}$

= $\frac{٢٢٥}{٢٨٩} + \frac{٦٤}{٢٨٩} = \frac{٢٨٩}{٢٨٩}$ = ١ = الأيسر

(٥) ١ + ظا^{٢} أ = ١ + $\left(\frac{١٥}{٨}\right)^{٢}$

= ١ + $\frac{٢٢٥}{٦٤} = \frac{٢٨٩}{٦٤}$

ملاحظات هامه

إذا كان أ ب جـ مثلث قائم فى جـ ، ∠ أ ، ∠ ب زاويتان متتامتان يكون :

١- جا أ حتا ب + حتا أ جا ب = ١

٢- جا^{٢} أ + حتا^{٢} أ = ١

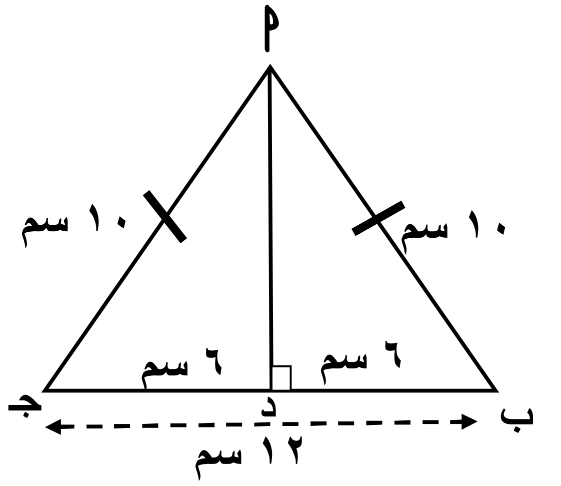
٣- جا أ = حتا ب ، حتا أ = جا ب

مثال : أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ب جـ = ١٠ سم ، ب جـ = ١٢ سم رسم $\overleftarrow{\text{أ د}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

، $\overleftarrow{\text{أ د}}$ ∩ $\overline{\text{ب جـ}}$ = { د }

أولا : أوجد قيمة : جا (∠ جـ أ د) ، حتا (∠ جـ أ د) ، ظا (∠ جـ أ د)

ثانيا : أثبت أن (أ) جا^{٢} جـ + حتا^{٢} جـ = ١ (ب) جا ب + حتا جـ > ١



الحل : ∵ أ ب = ب جـ ، $\overleftarrow{\text{أ د}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ د منتصف ب جـ

∴ ب د = د جـ = ١٢ ÷ ٢ = ٦ سم

تابع الحل : ∵ Δ م د جـ قائم فى د

∴ $(\text{م د})^2 = (\text{م جـ})^2 - (\text{د جـ})^2 = ١٠٠ - ٣٦ = ٦٤$ ∴ ا د = ٨ سم

أولا : جا (∠ جـ م د) = $\frac{\text{دجـ}}{\text{مجـ}} = \frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$ ، حتا (∠ جـ م د) = $\frac{\text{م د}}{\text{م جـ}} = \frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$

، ظا (∠ جـ م د) = $\frac{\text{دجـ}}{\text{م د}} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

ثانيا : (أ) الطرف الأيمن = جا^{٢} جـ + حتا^{٢} جـ = $\left(\frac{٨}{١٠}\right)^{٢} + \left(\frac{٦}{١٠}\right)^{٢}$

$= \frac{٦٤}{١٠٠} + \frac{٣٦}{١٠٠} = ١$ = الأيسر

(ب) جا ب + حتا جـ = $\frac{٨}{١٠} + \frac{٦}{١٠} = \frac{١٤}{١٠} = ١,٤ > ١$

مثال : إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متتامتين كنسبة ١ : ٢

فأوجد مقدار كل منهما بالقياس الستينى .

الحل : نفرض أن قياسي الزاويتان المتتامتان هما :س° ، ٢ س°

∴ س + ٢ س = ٩٠ ∴ ٣ س = ٩٠ ∴ س = ٣٠

∴ قياسي الزاويتان هما ٣٠ ، ٦٠

<u>تذكر أن</u> :
مجموع قياسي
الزاويتان
المتتامتان = ٩٠

مثال : إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متكاملتين كنسبة ٢ : ٤ فأوجد مقدار كل منهما بالقياس الستينى.

الحل : نفرض أن قياسي الزاويتان المتكاملتان هما : ٢س° ، ٤ س°

∴ ٢س + ٤ س = ١٨٠ ∴ ٦ س = ١٨٠ ∴ س = ٣٠

∴ قياسي الزاويتان هما ٦٠ ، ١٢٠

تذكر أن : مجموع قياسي الزاويتين المتكاملتين = ١٨٠

مثال : إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا مثلث كنسبة ٢ : ٤ : ٣ فأوجد القياس الستينى لكل زاوية من زواياه .

الحل : نفرض قياسات زوايا المثلث هى : ٢ س ، ٤ س ، ٣ س

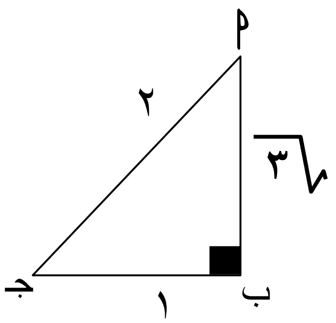
∴ ٢س + ٤ س + ٣ س = ١٨٠ ∴ ٩ س = ١٨٠

∴ س = ١٨٠ ÷ ٩ = ٢٠

∴ قياسات زوايا المثلث هى : ٤٠° ، ٨٠° ، ٦٠°

تذكر أن : مجموع قياسات الزوايا الدخلة للمثلث = ١٨٠

مثال : ا ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب فإذا كان ٢ ا ب = $\sqrt{٣}$ ا جـ فأوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية جـ .



الحل : ∵ ٢ ا ب = $\sqrt{٣}$ ا جـ ∴ $\frac{\text{ا ب}}{\text{ا جـ}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

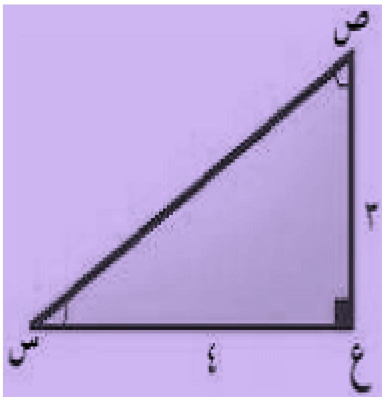
باستخدام نظرية فيثاغورث نجد : ب جـ = ١ وحدة طول

$\therefore$ جا جـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، حتا جـ = $\frac{١}{٢}$ ، ظا جـ = $\frac{\sqrt{٣}}{١}$ = $\sqrt{٣}$

تمارين على النسب المثلثية للزاوية الحادة

من كتاب المدرسة

① في الشكل المقابل : أكمل



أ جا س = ... ب جتا س = ...

جـ ظا س = ... د جتا ص = ...

هـ ظا ص = ... و جا ص = ...

② إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متتامتين كنسبة ٣ : ٥ فأوجد مقدار كل منهما بالقياس الستيني.

③ إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متكاملتين كنسبة ٣ : ٥ فأوجد مقدار كل منهما بالقياس الستيني.

④ إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا مثلث كنسبة ٣ : ٤ : ٧ فأوجد القياس الستيني لكل زاوية من زواياه.

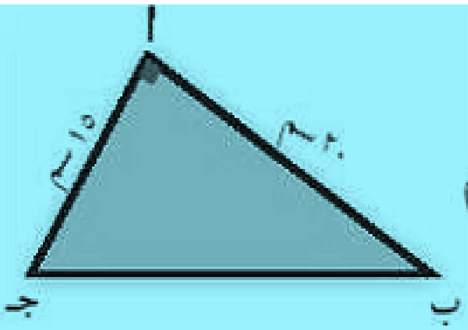
⑤ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه أ ب = ٨سم ، ب جـ = ١٥ سم؛ اكتب ما تساويه كل من النسب المثلثية الآتية : جا جـ ، جتا أ ، جتا جـ ، ظا جـ .

(٦) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، فإذا كان ٢ أ ب = $\sqrt{3}$ أ جـ فأوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية جـ .

(٧) في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث فيه ق(∠أ) = ٩٠°، أ جـ = ١٥سم ، أ ب = ٢٠سم

أثبت أن : جتا حـ جتا ب - جا حـ جا ب = صفر



(٨) س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص فيه س ص = ٥سم ، س ع = ١٣سم

أوجد قيمة : (أ) ظا س + ظا ع (ب) جتا س جتا ع - جا س جا ع

(جـ) جا س جتا ع + جتا س جا ع

(٩) س ص ع مثلث قائم الزاوية في ع ، س ع = ٧سم ، س ص = ٢٥سم ،

أوجد قيمة كل من : (أ) ظا س × ظا ص (ب) جا^2 س + جا^2 ص

(١٠) أ ب جـ د شبه منحرف متساوي الساقين فيه $\overline{\text{أد}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، أد = ٤سم ، أب = ٥سم ، ب جـ = ١٢سم

أثبت أن : $\frac{\text{٥ ظا ب جتا حـ}}{\text{جا}^2\text{ حـ + جتا}^2\text{ ب}} = ٣$ (إرشاد: نرسم عمودان من م ، د على $\overline{\text{ب جـ}}$)

***** مع تمنياتي لكم بالنجاح و التفوق *****

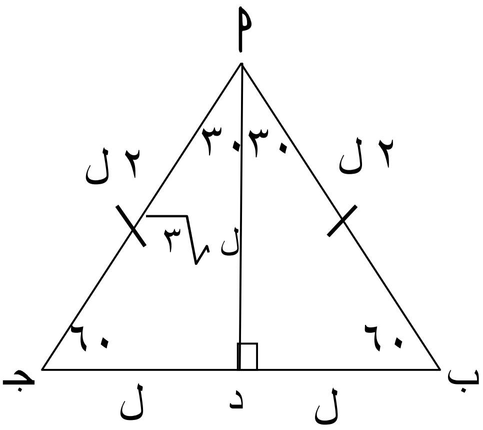
منتدى المنفلوطى للرياضيات www.elmnfalty26.7olm.org

عاشق الرياضيات المنفلوطى www.elmnfalty.7olm.org

إعداد / خالد المنفلوطي ت / ٠١٠٦٥٢٢١٣٨ الايميل / elmnfalty26@yahoo.com

النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا

النسب المثلثية للزاوية ٣٠ ° ، ٦٠ °



تمهيد : فى الشكل المقابل :

م ب جـ مثلث متساوي الأضلاع و طول ضلعه ٢ ل

رسم م د ⊥ ب جـ و نلاحظ التالي:

١) ∵ م ب = م جـ ، م د ⊥ ب جـ ∴ ب د = د جـ = ل وحدة طولية

، ق (∠ ب م د) = ق (∠ جـ م د) = ٦٠ ÷ ٢ = ٣٠ °

٢) ∵ م ب جـ مثلث متساوى الاضلاع

∴ ق (∠ ب م جـ) = ق (∠ ب) = ق (∠ جـ) = ٦٠ °

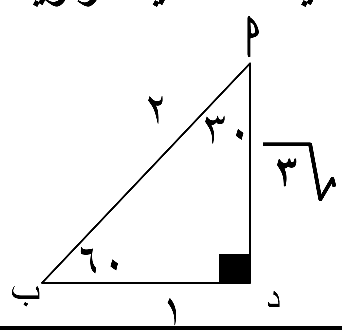
٣) (م د)^{٢} = (م ب)^{٢} ـ (ب د)^{٢} = (٢ ل)^{٢} ـ (ل)^{٢} = ٤ ل^{٢} ـ ل^{٢} = ٣ ل^{٢}

∴ م د = ل √٣

٤) Δ م ب د يسمى مثلث ثلاثينى ستينى ، النسب بين أطوال أضلاعه هى: ١ : ٢ : √٣

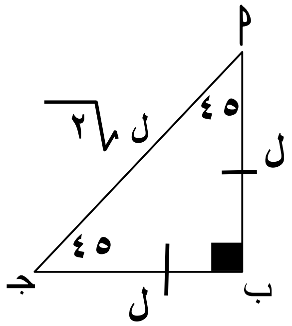
٥) النسب المثلثية الأساسية للزاوية ٣٠ ° ، ٦٠ ° :

النسبة / الزاوية	٣٠°	٦٠°
جا	١/٢	√٣/٢
جتا	√٣/٢	١/٢
ظا	١/√٣	√٣



النسب المثلثية للزاوية ٤٥ °

تمهيد : فى الشكل المقابل :



أ ب جـ مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية فى جـ

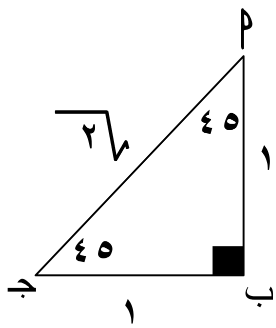
، طول كل من ساقيه ل

∵ أ جـ = ب جـ ∴ ق(∠ أ) = ق(∠ ب) = ٩٠ ÷ ٢ = ٤٥ °

∵ (أ جـ)٢ = (أ ب)٢ + (ب جـ)٢ = ل٢ + ل٢ = ٢ ل٢ ∴ أ جـ = ل √٢

النسب المثلثية بين أطوال أضلاع المثلث هي ١ : ١ : √٢

و يمكن إيجاد النسب المثلثية للزاوية ٤٥ ° كالتالي :



الزاوية / النسبة	٤٥°
جا	١ / √٢
جتا	١ / √٢
ظا	١

ملاحظات هامه

١- (جيب) أي زاوية يساوى (جيب تمام) الزاوية المتممة لهذه الزاوية
و العكس صحيح . مثلا : جا ٣٠ ° = حتا ٦٠ ° ، حتا ٣٠ ° = جا ٦٠ °

٢- لأي زاوية أ يكون ظا أ = جا أ / حتا أ

مثال :

أوجد قيمة كل من :

أ) جتا ٦٠° جا ٣٠° - جا ٦٠° ظا ٦٠° + جتا² ٣٠°

ب) $\dfrac{\text{جتا}^2\,60^\circ + \text{جتا}^2\,30^\circ + \text{ظا}^2\,45^\circ}{\text{جا}\,60^\circ\ \text{ظا}\,60^\circ - \text{جا}\,30^\circ}$

الحل :

أ) المقدار = جتا ٦٠° جا ٣٠° - جا ٦٠° ظا ٦٠° + جتا² ٣٠°

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

ب) المقدار $= \dfrac{\text{جتا}^2\,60^\circ + \text{جتا}^2\,30^\circ + \text{ظا}^2\,45^\circ}{\text{جا}\,60^\circ\ \text{ظا}\,60^\circ - \text{جا}\,30^\circ} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (1)^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3} - \left(\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 1}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} = \dfrac{1+1}{1} = 2$

برهن على صحة كل مما يأتي:

أ) جا² ٣٠° = ٥ جتا² ٦٠° - ظا² ٤٥°

ب) ظا² ٦٠° - ظا² ٣٠° = (١ + ظا ٦٠° ظا ٣٠°) ÷ جتا² ٣٠°

الحل :

أ) الطرف الأيمن = جا² ٣٠ $= \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

الطرف الأيسر = ٥ حتا² ٦٠ ° ـ ظا² ٤٥ ° $= 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - (1)^2$

$$= \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$

∴ الطرفان متساويان

ب) الطرف الأيمن = ظا^{٢} ٦٠ ° ـ ظا^{٢} ٣٠ ° = $(\sqrt{٣})^{٢} - (\frac{١}{\sqrt{٣}})^{٢} = ٣ - \frac{١}{٣} = \frac{٨}{٣}$

الطرف الأيسر = (١ + ظا ٦٠ ظا ٣٠) ÷ حتا^{٢} ٣٠

$= (١ + \sqrt{٣} \times \frac{١}{\sqrt{٣}}) \div (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^{٢} = (١ + ١) \div \frac{٣}{٤}$

$= ٢ \times \frac{٤}{٣} = \frac{٨}{٣}$

∴ الطرفان متساويان

مثال : أوجد النسب المثلثية التالية : جا ٧٦ ° ، حتا ٢٨ / ٣٤ ° ، ظا ٤٥ // ٢٨ / ٤٨ °

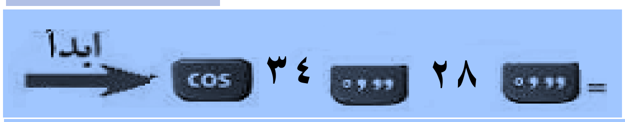
مقربا الناتج لأربعة أرقام عشرية .

الحل :

جا ٧٦ ° ≃ ٠,٩٧٠٣

٧٦ °

حتا ٢٨ / ٣٤ ° ≃ ٠,٣٨٣٢



ظا ٤٥ // ٢٨ / ٤٨ ° ≃ ٠,٥٦٥٣

مع عاشق الرياضيات دائما فى القمة

إيجاد الزاوية إذا عُملت النسبة المثلثية لها

نعلم أن : جا ٣٠° = ٠,٥ و لذلك إذا كانت جا س = ٠,٥ فإن : س = جا$^{-1}$ (٠,٥)

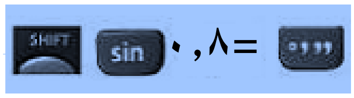
∴ س = ٣٠° ، باستخدام الآلة الحاسبة كالتالي :

مثال : أوجد ق(∠ هـ) فى كل مما يأتى :

(١) جا هـ = ٠,٨ (٢) حتا هـ = ٠,٧٣٢٤ (٣) ظا هـ = ١,٠٩٧٥

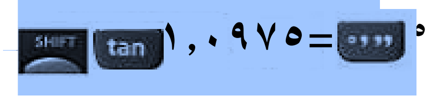
الحل :

(١) ∵ جا هـ = ٠,٨ ∴ق(∠ هـ) = ٤٨ ″ ٧ ′ ٥٣ °



(٢) ∵ حتا هـ = ٠,٧٣٢٤ ∴ق(∠ هـ) = ٤٣ ″ ٥٤ ′ ٤٢ °

(٣) ∵ ظا هـ = ١,٠٩٧٥ ∴ق(∠ هـ) = ٤١ ″ ٣٩ ′ ٤٧ °



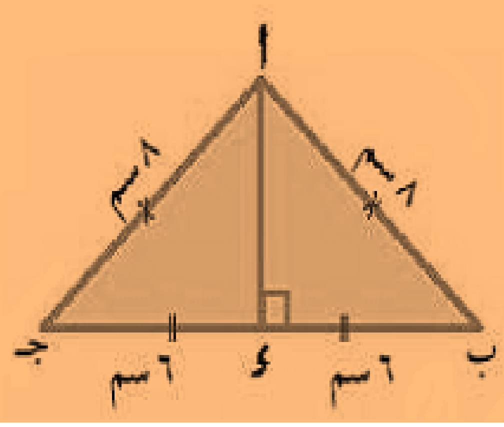
الربط بالهندسة

مثال : أ ب جـ مثلث متساوى الساقين فيه أ ب = أ جـ = ٨سم ، ب جـ = ١٢سم.

أوجد :

أولاً: ق(∠ ب)

ثانياً: مساحة سطح المثلث لأقرب رقمين عشريين.



إعداد / خالد المنفلوطي ت / ٠١٠٦٥٢٢١٣٨ الايميل / elmnfalty26@yahoo.com

الحل :

نرسم $\overrightarrow{\text{أء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

∵ المثلث أ ب جـ متساوى الساقين.

∴ ء منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ويكون ب ء = جـ ء = ٦سم

∵ جتا ب = $\frac{٦}{٨}$ = $\frac{٣}{٤}$ = ٠,٧٥

وباستخدام الآلة الحاسبة:

SHIFT cos 0.75 = °'''

∴ ق(∠ب) = ٣٥'' ٢٤' ٤١° (وهو المطلوب أولاً)

لإيجاد مساحة سطح المثلث نوجد أء (من نظرية فيثاغورث)

∵ $(\text{أء})^2 = (\text{أب})^2 - (\text{بء})^2$

∴ $(\text{أء})^2$ = ٦٤ - ٣٦ = ٢٨ ∴ أء = ٢$\sqrt{٧}$

∵ مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ب جـ × أء = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ٢$\sqrt{٧}$

= ١٢$\sqrt{٧}$ سم² ≃ ٣١,٧٥سم² (وهو المطلوب ثانياً)

حل آخر للجزء الثاني:

∵ جا ب = $\frac{\text{أء}}{\text{أب}}$ ∴ جا ب = $\frac{\text{أء}}{٨}$

∴ أء = ٨ جا (٣٥'' ٢٤' ٤١°) (١)

مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ب جـ × أء وبالتعويض من (١) فى هذه العلاقة

∴ مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ٨ جا (٣٥'' ٢٤' ٤١°) ≃ ٣١,٧٥سم².

ويمكن استخدام حاسبة الجيب على النحو التالى:

ابدأ → 1 ÷ 2 × 12 × 8 × 41 sin 24 °''' 35 °''' =

ملحوظة : **الطريقتين السابقتين كلاهما صواب يمكن التعود على واحدة فقط**

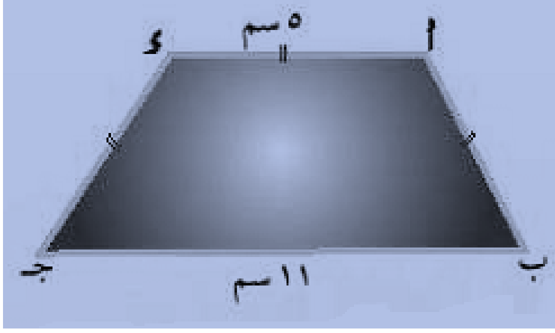
مثال : في الشكل المقابل:

أ ب جـ ء شبه منحرف متساوي الساقين فيه:

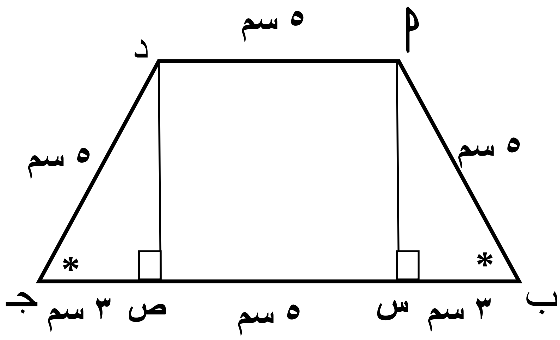
أ ب = أ ء = ء جـ = ٥ سم ، ب جـ = ١١ سم.

أوجد : **أولاً:** ق(∠ب) ، ق(∠أ)

ثانياً: مساحة شبه المنحرف أ ب جـ ء .



الحل :



نرسم م س ⊥ ب جـ ، د ص ⊥ ب جـ

∵ م د // ب جـ ∴ م س = د ص ، م د = س ص

∵ م د // س ص ، م د = س ص

∴ م س ص د متوازي أضلاع ، احدى زواياه قائمة

∴ م س ص د مستطيل

∵ م ب جـ د شبة منحرف متساوى الساقين ∴ ق (∠ ب) = ق (∠ جـ)

فى Δ م ب س : حتا ب = $\frac{٣}{٥}$ ∴ ق (∠ ب) = ٥٣° ٧′ ٤٨″

و بالمثل نجد أن : ق (∠ جـ) = ٥٣° ٧′ ٤٨″ [أولا]

∵ جا ب = $\frac{م س}{م ب}$ ∴ جا ٥٣° ٧′ ٤٨″ = $\frac{م س}{٣}$ ∴ ا س = ٣ جا ٥٣° ٧′ ٤٨″

∴ م س = ٢,٣٩٩٩٦ ≃ ٢ سم ∴ مساحة الشبة المنحرف = $\frac{١}{٢}$ (م د + ب جـ) × م س

= $\frac{١}{٢}$ (٥ + ١١) × ٢ = ١٦ سم²

مثال : إذا كانت ظا (س + ٥) = $\sqrt{٣}$ حيث س زاوية حادة أوجد قيمة س .

الحل : ∵ ظا (س + ٥) = $\sqrt{٣}$ ∴ س + ٥ = ظا$^{-١}$ ($\sqrt{٣}$)

∴ س + ٥ = ٦٠ ∴ س = ٥٥

مثال : إذا كانت ظا ٣ س = $\sqrt{٣}$ حيث س زاوية حادة أوجد قيمة س .

الحل : ∵ ظا ٣ س = $\sqrt{٣}$ ∴ ٣ س = ظا$^{-١}$ ($\sqrt{٣}$) ∴ ٣ س = ٦٠ ∴ س = ٢٠

مثال : أوجد قيمة س إذا كان ٤ س جا^{٢} (٣٠) = حتا^{٢} (٣٠) ظا^{٢} (٣٠) ظا^{٢} (٤٥)

الحل :

$$∵ ٤ \text{ س} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} = \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢} \times \left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)^{٢} \times (١)^{٢}$$

$$∴ ٤ \text{ س} \times \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤} \times \frac{١}{٣} \times ١ \qquad ∴ \text{س} = \frac{١}{٤}$$

مثال : بدون استخدم الآلة الحاسبة أوجد قيمة س (حيث س زاوية حادة) التى تحقق

ظا س = ٤ حتا ٦٠ جا ٣٠

الحل : ∵ ظا س = ٤ حتا ٦٠ جا ٣٠ $∴ \text{ظا س} = ٤ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = ١$

∴ س = ظا$^{-١}$ (١) ∴ س = ٤٥

تمارين على النسب المثلثية لبعض الزوايا

من كتاب المدرسة

١ أكمل ما يأتي :

(١) إذا كانت جا س = $\frac{١}{٢}$ حيث س زاوية حادة فإن ق(∠س) = ...

(٢) إذا كانت جتا $\frac{س}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ حيث س زاوية حادة فإن ق(∠س) = ...

(٣) جا ٦٠° + جتا ٣٠° - ظا ٦٠° = ...

(٤) إذا كانت ظا (س + ١٠) = $\sqrt{٣}$ حيث س زاوية حادة فإن ق(∠س) = ...

(٥) إذا كانت ظا ٣س = $\sqrt{٣}$ حيث س زاوية حادة فإن ق(∠س) = ...

٢ أوجد قيمة

جا ٤٥° جتا ٤٥° + جا ٣٠° جتا ٦٠° - جتا^٢ ٣٠°

٣ أثبت أن:

أ جتا ٦٠° = ٢ جتا^٢ ٣٠° - ١

ب ظا^٢ ٦٠° - ظا^٢ ٤٥° = جا^٢ ٦٠° + جتا^٢ ٦٠° + ٢ جا ٣٠°

٤ أوجد قيمة س اذا كان:

٤س = جتا^٢ ٣٠° ظا^٢ ٣٠° ظا^٢ ٤٥°

٥ أوجد هـ ، حيث هـ زاوية حادة.

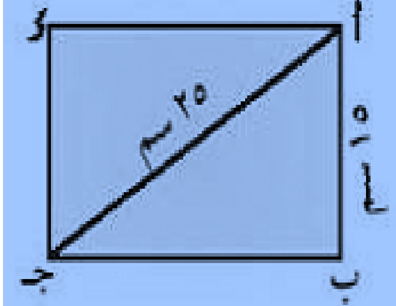
جا هـ = جا ٦٠° جتا ٣٠° - جتا ٦٠° جا ٣٠°

٦ بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة س (حيث س زاوية حادة) التي تحقق كلاً من :

أ ظا س = ٤ جتا ٦٠° جا ٣٠°

ب ٢ جا س = جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا ٣٠° جا ٦٠°

٧ **الربط بالهندسة:** فى الشكل المقابل:



أ ب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ١٥سم ، أ جـ = ٢٥سم .

أوجد : **أولاً:** ق(∠ أ جـ ب)

ثانياً: مساحة سطح المستطيل أ ب جـ ء .

---

٨ **الربط بالهندسة:** فى الشكل المقابل:

أ ب جـ ء متوازى أضلاع مساحة سطحه ٩٦سم^2 ، ب هـ : هـ جـ = ١ : ٣

$\overline{\text{أهـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، أهـ = ٨سم

أوجد : **أولاً:** طول $\overline{\text{أء}}$ **ثانياً:** ق(∠ب)

ثالثاً: طول $\overline{\text{أب}}$ لأقرب رقم عشري واحد **(استخدم أكثر من طريقة)**

---

٩ أثبت صحة كل من المتساويات الآتية :

أ جا ٦٠° = ٢ جا ٣٠° جتا ٣٠°

ب ظا ٦٠° = $\frac{\text{٢ ظا ٣٠°}}{\text{١ - ظا}^{2}\text{ ٣٠°}}$

---

١٠ أ ب جـ مثلث متساوى الساقين فيه أ ب = أ جـ = ١٢,٦سم ، ق(∠جـ) = ٢٤َ ٨٤° .

أوجد لأقرب رقم عشري واحد طول ب جـ .

---

١١ أ ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overleftarrow{\text{أء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ق(∠ب) = ٩٠° ، فإذا كان أب = ٣سم ، أء = ٦سم ،

ب جـ = ١٠سم . **أثبت أن :** جتا (ء جـ ب) - ظا (أ جـ ب) = $\frac{1}{2}$

---

١٢ سُلَّم $\overline{\text{أب}}$ طوله ٦أمتار يستند طرفه العلوى أ على حائط رأسى وطرفه ب على أرض أفقية ، فإذا كانت جـ هى مسقط نقطة أ على سطح الأرض ، وكان زاوية ميل السلم على سطح الأرض ٦٠° فأوجد طول $\overline{\text{أجـ}}$.

إعداد / خالد المنفلوطي   ت / ٠١٠٦٥٢٢١٣٨   الايميل / elmnfalty26@yahoo.com